107 曲面交差問題に関する研究（第１報）
ー高次代数方程式の解法ー

工学社エンジニアリング㈱　○伯田賢司
北海道大学　工学部　田中文基　岸浪建史

１．　はじめに

計算機内部において、自由曲面はパラメトリック形式（ｕｖ空間）で取り扱われる。一方、その曲面を知覚可能にする（グラフィックで描画する、加工により実体化する）ためには、実空間座標を用いなければならず、ここに自由曲面にまつわる種々の問題の根元がある。特に、複数の曲面パッチの相互関係を考える場合は、実空間を橋渡しにして各パッチのパラメータを操作しなければならない。本報では、その代表例として自由曲面同士の交差問題を取り上げ、研究動向の調査、並びにそこで用いられる高次代数方程式解法について検討を加えた結果を報告する。

２．　自由曲面交差問題に対するアプローチ

ある数学的問題を計算機で解こうという時、そのアプローチの仕方は次の２通りに大別される。

① 種々のテクニックは使うものの、できるだけ数学的に解いてゆこうとする。

② 処理アルゴリズムの工夫や、問題の簡略化により、数学的問題は避けて解こうとする。

このことは、自由曲面の交差問題においては次の様な形で現われている。

①' 問題を、可能な限り代数的に解けるような形に変形して解く。

②' 演算の繰り返し（Iteration）によって、ある要求精度の範囲まで真の交点に接近した時点で交点が求まったとする。あるいは、自由曲面をポリゴンパッチなどの扱い易い形で近似して解く。

アプローチ①'は数学的に困難な問題を含んでおり、通常は実アプリケーションのレベルで要求される精度を満たせば良いので、処理のコスト・パフォーマンスの観点からアプローチ②'が用いられる。しかし、②'では「近似」というテクニックがよく用いられるので、厳密解を求めなければならないような用途には適さない。例えば、２つの対象（線、面）が「接している」という状態を正確に求める事が重要である場合には、厳密解が必要となるので、アプローチ①'を用いることになる。

３．　曲面交差問題における厳密解法

曲面交差問題の厳密な取扱いに近い例として、コンピュータ・グラフィックスのレイ・トレーシング法におけるJ.T.Kajiyaの方法がある（文献1),2)）。これは、表示物体がパラメトリックな３次曲面パッチで構成されている場合に、曲面パラメータに関する１元１８次方程式を解いて光線と表示物体との交点を厳密に求めるというもので、曲面の一方を線織面に限定すれば、アプローチ①'に分類される曲面交差問題に発展させ得る。しかし、ここでネックになるのは１８次（高次）方程式の解法で、特に先に述べた「接している」という現象は、「多重解を持つ高次方程式」として現われる。一般に、高次方程式が多重解を持つと、収束性が悪くなったり、解法によっては解が求まらないという事態に陥りがちであるが、どちらの文献もこの点については詳しく述べていない。そこで、以下のように検証してみた。

４．　多重解を持つ高次方程式に対するDKA法の振舞い

Kajiyaの方法では、曲面のパラメータに関する１元１８次方程式を解いて、$1 \geq u$（またはv）≥ 0の範囲の実数解u_i（またはv_i）を全て求める事がポイントである。Kajiyaは、その解法としてLaguerre法を用いて、解を１つずつ求めていった（文献2)）。これに対し大野は、Durand-Kerner-Aberth法（略してDKA法）を用いて、全ての解を同時に求める事を提案した（文献1)）。

DKA法は、高次方程式が持つ全ての解（複素解を含む）を、与えた初期値によらず、かつ同時に求められるという特長を持ち、筆者らも計算機実験によりこの事を確認している。（実験のプログラムに関しては、文献6)を参考にした。）

DKA法には２次法と３次法とがあり（文献3),4)）、大野は３次法を用いている。解こうとする方程式を

$$f(z)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_{n-1} z+a_n=0 \quad \cdots(1)$$
$$(a_0 \neq 0)$$

とすると、３次法の反復公式は

$$z_i^{(k+1)}=z_i^{(k)}-\frac{g(z_i)}{1-g(z_i)\sum_{j=1,\cdots,n,\neq i}(1/(z_i-z_j))} \quad \cdots(2)$$

ここに、$g(z_i)=f(z_i)/f'(z_i)$

である。DKA法は、初期値が解からまったく離れていても収束するが、Aberthの初期値を用いるのが良いとされ、それは

$$z_i^{(0)}=r \cdot \exp(J(2\pi(i-1)+3\pi/2)/n) \quad \cdots(3)$$
$$(J=\sqrt{-1})$$

ここに、$r=\max(n|a_i/a_0|^{1/i})$

で与えられる。

DKA法は、複素解をも同時に求める事ができて、その収束の模様は複素平面内の軌跡で観察される。そこで、いくつかの方程式を想定して、収束の模様を観察してみた。その結果の一部を図1,2,3に示す。

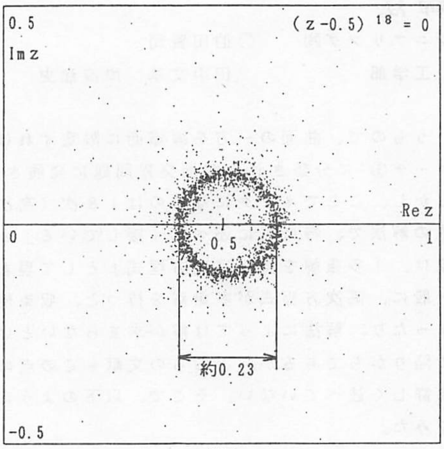

図1

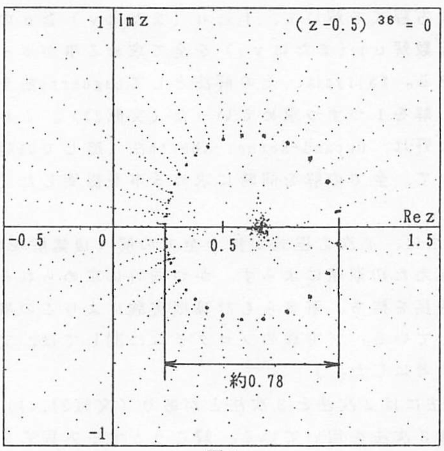

図2

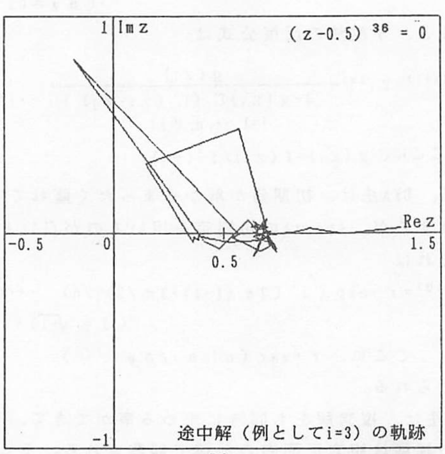

図3

（いずれも、演算繰り返し数=200回）

5. 検証結果の分析と考察

図1,2,3からもわかるように、多重解に対するDKA法の挙動には、以下の様な性質があることがわかった。

(1) 途中解 $z_i^{(k)}$ は、全体として真の多重解（真解）の周囲に雲のリングのように集まり、真解には収束しない（図1）。リングの径は、真解の多重度が増すにつれて拡大する（図2）。

(2) 真解を巡るリングは、個々の途中解が形成するさらに小さな部分雲によって構成されており、多重度が増すにつれてその存在が明確になってくる（図2）。

(3) 個々の途中解が描く軌跡は、非常に複雑である。時には、まったく離れた場所へジャンプする現象も見られる（図3）。

Kajiyaの方法のワースト・ケースを考えると、DKA法だけでは不十分であると思われる。しかしながら、初期値によらず全ての解（多重解に対してはその近似値）が求まるという特長は有用であるので、多重解を解く別の解法（文献5））への良い初期値を得るためにDKA法を用いるのが良いと思われる。

6. まとめ

曲面交差問題へのアプローチとして、解法を分類し、そのうちの数学的解法の問題点について検討を行ない、以下の結論を得た。

1. DKA法の利点を、計算機実験で確かめた。
2. 多重解を持つ高次方程式に対するDKA法の挙動をあきらかにした。
3. DKA法による近似解を、多重解を解く別の解法の初期値として用いる事を示唆した。

最後に、代数方程式解法について助言を下さった、室蘭工業大学長島助教授に謝意を表します。

（参考文献）

1） 大野義夫：「ラスター・グラフィックスのソフトウェア」 連載第26回～第29回，PIXEL No.72,77,80,83

2） James T.Kajiya: "RAY TRACING PARAMETRIC PATCHES", SIGGRAPH'82 Proceedings, pp.245-254

3） 山本哲朗：「ある代数方程式解法と解の事後評価法」 数理科学，pp.52-57，1976.7

4） 伊理正夫：「数値計算」，理工系基礎の数学12，朝倉書店，1981

5） A.Ralston/P.Rabinowitz共著，戸田英雄/小野令美共訳：「電子計算機のための数値解析の理論と応用<下>」，ブレイン図書出版株式会社，1986

6） 竹本宣弘/荒実共著：「Cによる数値計算」，朝倉書店，1987