

1. はじめに

三次元測定機が普及するにつれて、実形状から得られる点データに対する処理は多岐にわたっている。従来から点データと設計形状との比較による実形状の誤差評価は行われてきたが、近年、点データから加工方法の評価・検証、実形状そのものの形状評価が行われるにつれ、点データから実形状の幾何的性質を決定する必要がでてきた。本研究ではこの作業を同定作業と定義し、その原理と必要条件について報告する。なお、工業製品の多くは2次曲面から構成されているので、対象形状を2次曲面に限定した。

2. 形状同定と加工プロセス

工業製品の場合、その形状生成プロセスは図1のように考えられる。ある面が“平面”あるいは“円筒”として設計されたとする。

計算機空間では、工作機械で起こり得る形状創成運動をモデル化した加工プロセスモデル(図2)が用意されている。各モデルは、加工時に起こり得る切削運動をモデル化しており、いずれの場合も2次曲面を創成することがわかっており各モデルと2次曲面の種類の対応づけは可能である。

一方、実空間では実加工プロセスによって実形状が生成されるが、加工誤差が含まれており設計形状とは異なる2次曲面となり得る。この実形状から三次元測定機によって離散測定点の座標値を求める。

ここで、離散測定点と2次曲面との同定を行うことにより、システムは閉じた形となり、同定された2次曲面の種類に対応する加工プロセスモデルから実加工でどのような加工誤差が発生したのか推定可能になるとと思われる。

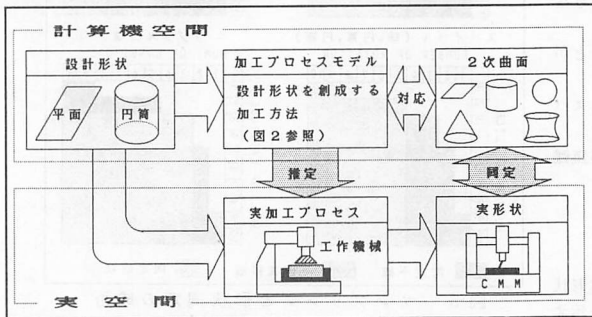


図1 形状同定と加工プロセス

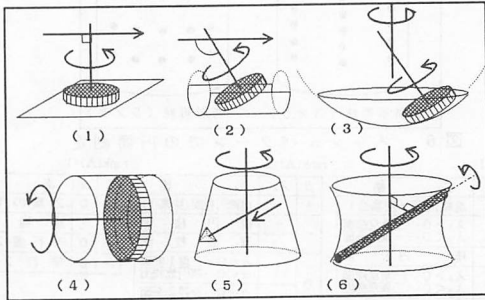


図2 加工プロセスモデル

3. 加工プロセスと2次曲面

前述したように、実際の加工は誤差要因によって設計形状を正しく生成するとは限らない。(図2参照)

例えば、平面加工の場合フェイスカッターを用いるのが一般的であるが、(1)正常な条件下では平面を生成するが、(2)カッターの移動軸と回転軸の直交関係が崩れると楕円柱面になってしまい、(3)カッターの回転軸が曲がっていると球面を生成してしまう。

同様に、円柱面加工においても、(4)ドリルが正常に回転すると円柱面を生成するが、(5)ボーリング加工において工具刃先が熱膨張のために外側へ移動してゆくと円錐面を生成し、(6)エンドミルによる外周加工で、工具回転軸と切刃回転軸とが平行でない一葉双曲面になってしまう。

以上のように、平面・円柱面は、加工によって異なる2次曲面へ形状変換される可能性をもっている。

4. 形状同定

同定を行うには、点データから最小自乗法によって2次曲面を導出し標準形にした後、形状分類を行えばよい。

<2次曲面の最小自乗法>

2次曲面は一般に次のように表せる。
 $a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2(f'yz + g'zx + h'xy + l'x + m'y + n'z) + d' = 0 \dots (1)$

しかし、(1)式に最小自乗法を適用すると正規方程式は齊次方程式になるため、 $d' \neq 0$ とおき $a' = a d', b' = b d', \dots, n' = n d'$ とおき非齊次方程式になるようにする。よって(1)式は、

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2(fyz + gzx + hxy + lx + my + nz) + 1 = 0 \dots (2)$$

となる。この式に測定点の座標 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ を代入すると残差 $\varepsilon_i = f(x_i, y_i, z_i)$ が生じる。この残差が正規分布すると仮定すれば、最小自乗法の考え方をを用いて残差の自乗和が最小となるように各係数を定めることができる。従って評価関数を次のように定め、正規方程式を導く。

$$J(C) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = {}^t(XC + N) \cdot (XC + N) \dots (3)$$

但し、

$$X = \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & z_1x_1 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2z_2 & z_2x_2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & y_n^2 & z_n^2 & y_nz_n & z_nx_n & x_ny_n & x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}$$

$$C = {}^t [a \ b \ c \ 2f \ 2g \ 2h \ 2l \ 2m \ 2n]$$

$$N = {}^t [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

(3)式が最小となる停留条件式は、 $\partial J / \partial C = 0$ である。すなわち正規方程式は、

$${}^t X \cdot X \cdot C + {}^t X \cdot N = 0 \dots (4)$$

$$C = - ({}^t X \cdot X)^{-1} \cdot {}^t X \cdot N \dots (5)$$

(5)式から2次曲面の係数を求めることができる。

<標準形2次曲面の導出>

同定2次曲面と設計形状との比較・評価を行うには、両者の座標系を一致させる必要があり、それには、標準形2次曲面に統一するのが便利である。(2)式の2次曲面は(6)式のように表せる。

$${}^t X \begin{bmatrix} A & B \\ {}^t B & 1 \end{bmatrix} X = 0 \dots (6)$$

但し、

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ {}^t B & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ここで、(5)式について平行移動と座標軸の回転を施せば次の三つの標準形2次曲面が得られる。¹⁾

$$\text{rank}(A) = 1 : \lambda_1 x^2 + \alpha y + \beta = 0 \dots (7)$$

$$\text{rank}(A)=2: \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \alpha z + \beta = 0 \quad \dots\dots(8)$$

$$\text{rank}(A)=3: \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \beta = 0 \quad \dots\dots(9)$$

(7)(8)(9)式を用いて形状分類を行う。

<形状分類>

一般に標準形2次曲面の分類は $\text{rank}(\tilde{A})$ と $\text{rank}(A)$ を用いて行われるが、ここでは係数の符号のみを用いて表1のように分類した。これによって形状分類が可能となる。表中の+、-、0は各係数の符号である。

5. 離散データのサンプリング

正確な形状同定を行うには、2次曲面式が求まり、誤判定を行わないことが要求される。そのためには、測定点のサンプリングが重要な問題である。

サンプリングの属性には、①サンプリング間隔、②測定点数、③測定パターンがある。サンプリング間隔は、対象形状のサイズに合わせて適宜調整するものとして今回は詳述しない。測定点数は、2次曲面の性質上9点以上必要だがそれだけでは十分ではない。例えば、図3(A)(B)のような測定を行うと点データからは形状が一意に決定できなくなる。測定パターンは、三次元測定機を想定し図4の4種類を考えた。

ここで重要なことは、正確な形状同定のためのサンプリング方法である。しかし、それを数学的に証明するのは困難なためシミュレーションによって確かめた。そこで、測定対象は形状偏差を持たない2次曲面であり、かつ測定誤差が無いという条件下で必要測定点数と同定の成否を調べた。その結果が図5である。“同定不能”は、(5)式の $X \cdot X$ が正則でなくなる、つまり一意に形状が定まらなく同定できないことを示している。“不確定領域”は、測定対象によって同定が成功したり失敗したりすることを示している。なお、3×5メッシュと5×3メッシュには図6のような違いがある。

さて、図5から測定点のサンプリング方法について次のことがいえる。

- 円筒型形状の同定には、従来から経験的に用いられてきたスパイラル測定が適している。
- 対象形状が未知の場合、 $n \times n$ メッシュ測定 ($n \geq 5$) が無難である。ただし、測定点数が多く効率が悪い。
- 球形の同定には、ラジアル測定の効率が良い。

6. 結論

実形状の設計形状に対する評価、その加工方法の評価、実形状そのものの評価に有効と思われる2次曲面同定法の必要性を示すと同時に、その理論及びそれに適した測定点のサンプリング方法を示した。

参考文献

- 1) 尾野寺 毅他：基礎課程線形代数学／共立出版
- 2) 中川 徹他：最小二乗法による実験データ解析／東京大学出版会

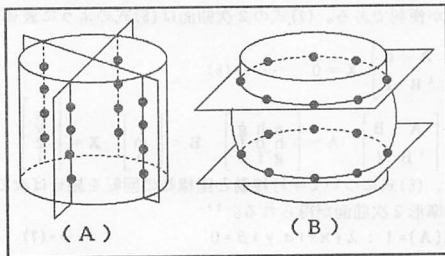


図3 不適当な測定パターン

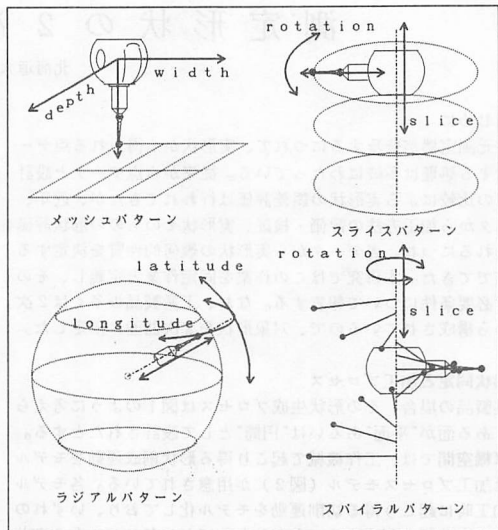


図4 三次元測定機の測定パターン

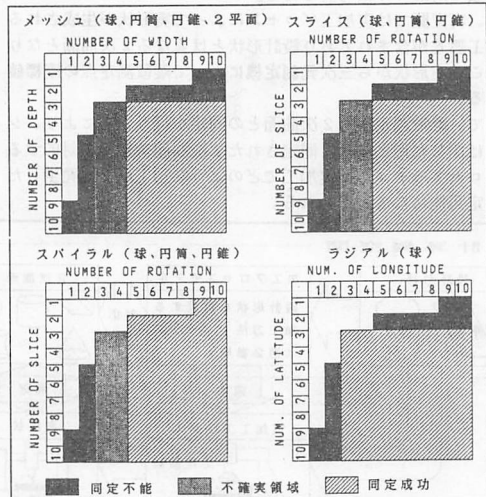


図5 サンプリングと形状同定の成否

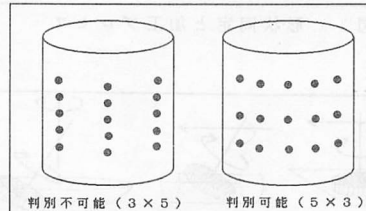


図6 メッシュパターンでの円筒測定

rank(A)=3			rank(A)=2			rank(A)=1		
β	λ_3	名称	β	λ_2	名称	β	α	名称
+	+	虚楕円面(空集合)	+	+	虚楕円柱面(空集合)	0	0	2重の1平面
+	-	$\lambda_2 > 0$: 二葉双曲面	-	+	楕円柱面	±	±	放物柱面
		$\lambda_2 < 0$: 二葉双曲面	-	-	双曲柱面	+	0	平行虚2平面
-	+	楕円面	0	+	$\alpha = 0$: 楕円直線	-	0	平行2平面
-	-	$\lambda_2 > 0$: 二葉双曲面		-	$\alpha < 0$: 楕円放物面			
0	+	虚錐面(1点)		-	$\alpha < 0$: 交差2平面			
0	-	2次錐面			$\alpha < 0$: 双曲放物面			

表1 係数の符号による2次曲面の分類