216

非線形系におけるパターン形成に関する基礎的研究
ーベナール対流におけるパターン形成についてー

北海道大学　工学部　○船切篤　渋川勝久　五十嵐悟

1．はじめに

自律的な秩序形成として、空間的なパターンが自己組織的に形成発達する系がある。ここでは、秩序の成立の仕組みを研究するために、比較的扱いの簡単な系であるベナール対流を扱う。

ベナール対流で実験的に観察されるロールパターン形成の特徴の多くは、次の空間二次元の方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=\varepsilon\phi-(\Delta+q_0{}^2)^2\phi-\phi^3 \qquad \cdots(1)$$

によって示される。[1)]　ただし、

$$\phi=\partial_n\phi=0 \quad (\text{境界条件}) \qquad \cdots(2)$$

ϕ：対流の垂直方向速度、ε：$(R-R_c)/R_c$、

q_0：R_c を最小にする臨界波数、（R:レイリー数、R_c:臨界レイリー数）

$\Delta=\partial_{xx}+\partial_{yy}$：ラプラシアン、$\partial_n$：境界に垂直方向の微分

である。この方程式をある形状の領域内で数値計算することで、領域内における対流のロールパターンの発展・形成を見ることができる。

矩形領域では、ロールが境界に垂直になろうとする傾向、また、境界から離れたところではまっすぐな領域を作ろうとする傾向を持つことは知られている。

そこで、本研究では比較的簡単な形状である、円形、正方形、およびそれらの内部に円または正方形の境界を持つ領域について数値計算を行い、パターンの形成に対する境界の影響を考察する。また、時間の経過と共に系のリャプノフ汎関数の値を計算することで、対流パターンの収束を示す。

2．数値計算

数値計算は先の方程式を差分化して行った。時間微分は前進差分、他の微分には中心差分を用いた。

ϕの初期値は、-1〜1 の間でランダムに与えた。また、$\varepsilon=0.1$、$q_0=1.0$ 、x,y 方向の刻み幅:h＝0.5、時間の刻み幅:$\tau=0.002$ とした。境界条件は、境界上の点を 0 とし、また、境界の外に仮想の点を考え内側の点と同じ値を与えることとした。

リャプノフ汎関数:F は、

$$F[\phi]=\frac{1}{2}\int dxdy\{-\varepsilon\phi^2+\frac{1}{2}\phi^4+[(\Delta+1)\phi]^2\} \qquad \cdots(3)$$

であり[1)]、数値積分は台形則を用いた。

3．結果および考察

数値計算の結果を図１〜７に示す。＋はϕが正、×は負の部分を示す。ただし、-0.02〜0.02 の範囲は、0 と見なした。絶対値の大きさに従い，0.2ごとにマークの大きさを変えて描いた。パターンは＋×の分布で見る。

30×30の正方形領域（図１）では、時間経過がわずかなときの乱れた状態（図1.a）から，境界に垂直なロールがしだいに形成されていく（図1.b）。ロールは正方形のほぼ全域に及び、境界から離れた領域では直線となる傾向がみられる（図1.c）。また、20×20の大きさでも同様である（図２）。しかし、15×15程度の小さな正方形（図３）では、パターンは時間の経過と共に境界付近から次第に消えていく（図３.b）。さらに時間が経過すると中心付近のパターンも消える（図３.c）。リャプノフ関数値を図4に示す。横軸に時間、縦軸のリャプノフ関数の値は時刻０における値で除したものである。どの大きさの領域でも値は時間の経過と共に減少し、広い領域ほどより低い値へ収束している。

次に、内部に境界を持つ領域についての結果をみる。外形が一辺30の正方形、内部境界の形が一辺10の正方形の領域の場合（図５）には、ほぼ全域にロールのパターンが形成される。内外の境界の直線部分にはさまれた部分では、ロールは双方の境界に垂直に形成される。内部の正方形の一辺が20の領域の場合（図６）、短時間でパターンは消える。外形が直径30の円、内部が直径10の円で囲ま

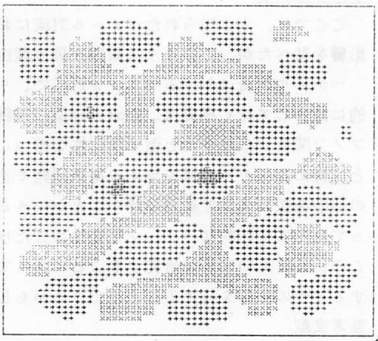

図１．ａ　t=10.0

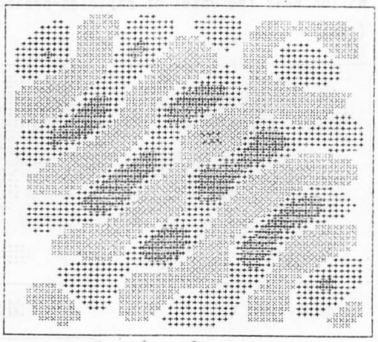

図１．ｂ　t=50.0

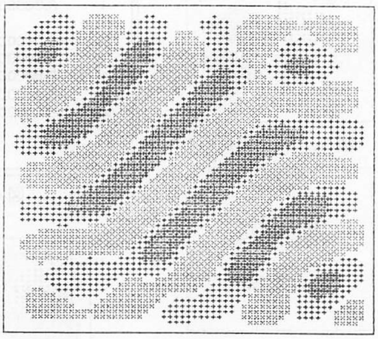

図１．ｃ　t=100.0

れた領域の場合（図７）、内外の境界に垂直なロールが全体に形成される。内部の円の直径が20の領域の場合（図８）には、短時間でパターンが消える。

４．まとめ

大きさの異なる正方形領域、および内部境界を持つ正方形、および円形の領域に対して数値計算を行い、対流パターンの形成を示した。狭い領域においては、パターンは境界付近から消えていく現象が確認された。

５．あとがき

ここでは、よく知られたベナール対流におけるパターン形成に及ぼす境界条件の影響を調べたが、このような問題を扱う理由の一つは次のようなものである。

ベナール対流におけるパターン形成で、リャプノフ汎関数が存在し、それが時間的に減少して行く事実は、Hopfield型の神経回路網におけるエネルギー関数（リャプノフ関数）の最小化と強い類似性を持つことは興味深い。神経回路モデルの場合と同様に式（１）の解を与える電気回路モデルを構成することができれば、この種の問題を並列演算で高速に解くことができる。また、このようなモデルは条件によって系内に空間的なパターンを発生させたり、消滅させたりすることができるので、このような系の挙動を研究することによって、神経系の秩序とカオスの形成を説明する一つの糸口を与えることができるかもしれない。

参考文献

1) H.S.Greenside, W.M.Coughran,Jr., and N.L.Schryer:Nonlinear Pattern Formation near the Onset of Rayleigh-Benard Convection, Phys.Rev.Lett.49,726 (1982).

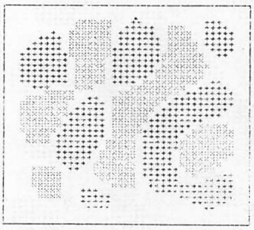

図２．ａ　t=10.0

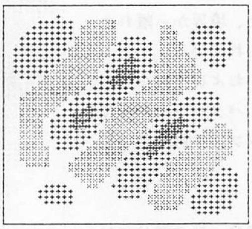

図２．ｂ　t=100.0

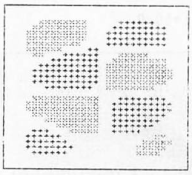

図３．ａ　t=10.0

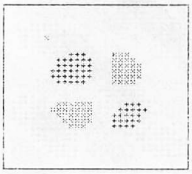

図３．ｂ　t=50.0

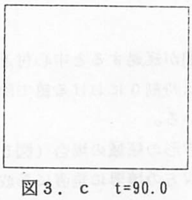

図３．ｃ　t=90.0

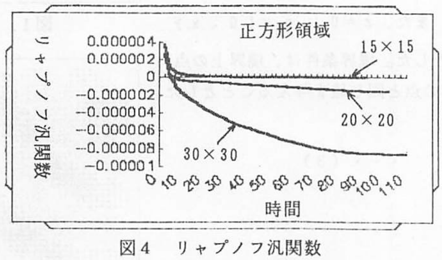

図４　リャプノフ汎関数

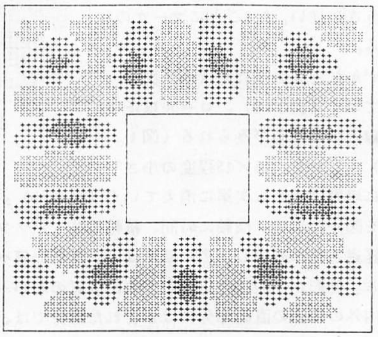

図５　t=100.0

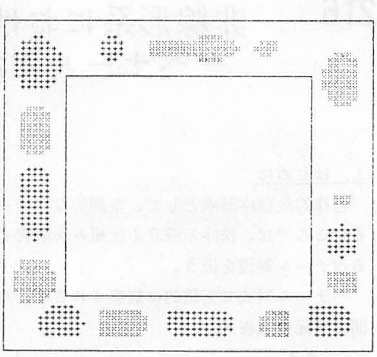

図６．ａ　t=2.5

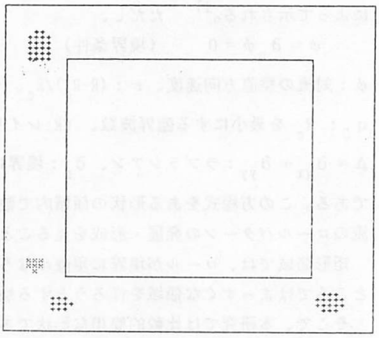

図６．ｂ　t=5.0

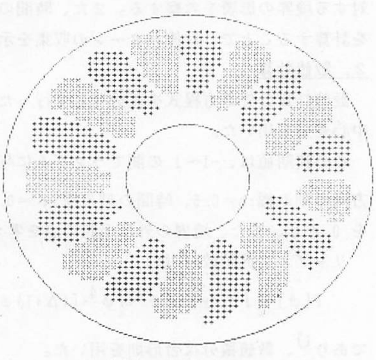

図７　t=50.0

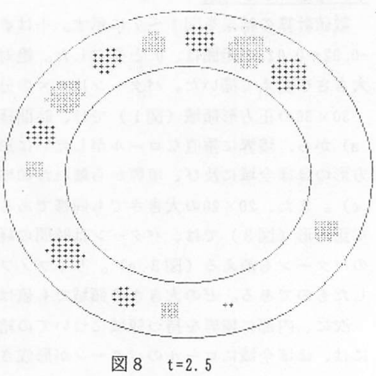

図８　t=2.5