

要旨

本研究では任意の厚さを持つ弾性板の振動に対して精度の高い近似方程式を導出することを目的としている。従来の板の振動の近似理論では、近似方程式に含まれる補正係数の決定法が適切でなく、そのため高次の近似方程式を求めるのは困難である。そこで本報では、その決定法に改良を加え、高次の近似方程式を組織的に求める方法を提出する。

1. はじめに

機械や構造物に板構造が使われる例は極めて多く、板の変形や振動に関する研究は古くから行われてきた。しかし、これらの多くは薄板の近似に基づいており、板の厚さが考慮されている場合は少ない。

この問題に対してBache,Hegemier[1]らは、振動の近似方程式を板厚方向の座標に関して展開して近似方程式を求めている。この近似方程式には厳密な理論との食い違いを修正するための補正係数が導入されている。補正係数は厳密な理論と近似理論のそれぞれの波数が0の時の周波数と群速度を一致させることによって求められている。しかし、彼らの理論では、高次近似の補正係数を求めるのは困難である。

そこで、本報では展開法に改良を加え、高次の理論を組織的に求める方法を提出する。

2. 板の振動方程式

厚さhの板を考え、中央面に座標 x_1, x_2 を、板厚方向に座標 x_3 をとる。板は均質、等方性の弾性体とし、変位を線型弾性の範囲に限定する。各座標方向の変位を $\xi_i(i=1,2,3)$ とすると板の運動方程式と構成方程式は、次のように表すことが出来る。

$$\alpha_j \sigma_{ij} = \rho \dot{L}_t^2 \xi_i \quad (i=1,2,3) \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \alpha_k \xi_k + \mu (\alpha_j \xi_i + \alpha_i \xi_j) \quad (i,j=1,2,3) \quad (2)$$

ここで、 α_i, L_t はそれぞれ x_i , 時間 t に関する微分演算子、 σ_{ij} は応力テンソル、 ρ は板の密度、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、そして λ, μ はLame'定数である。また、特に断らない限り添字については総和規約に従う。

(2)式を x_j で微分し、 \cdot について総和をとったあと(1)に代入し、更に x_i で微分し、整理すると、次のようになる。

$$(\alpha_3^2 + L_t^2) \epsilon_{kk} = 0 \quad (3)$$

この方程式を x_3 について形式的に解くと、

$$\epsilon_{kk} = \cos(L_t x_3) \Theta_0 + \sin(L_t x_3) \Theta_1 \quad (4)$$

となる。ここで、

ϵ_{kk} は体積ひずみであり、

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \quad (5)$$

$$c_L^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho \quad (6)$$

$$L_t^2 = \alpha^2 - L_t^2 c_L^2 \quad (7)$$

$$\Theta_0 = \epsilon_{kk}|_{x_3=0}, \Theta_1 = \alpha_3 \epsilon_{kk}|_{x_3=0} \quad (8)$$

である。

また、(2)式を(1)式に代入し、(3)式を考慮すると、
 $(\alpha_3^2 + L_t^2)(\alpha_3^2 + L_t^2) \xi_i = 0 \quad (9)$

が得られる。ここで、

$$c_T^2 = \mu / \rho \quad (10)$$

$$L_t^2 = \alpha^2 - L_t^2 c_T^2 \quad (11)$$

である。これを x_3 について解くと、変位が得られる。更に、得られた変位を(2)式に代入すると応力を求めることが出来る。

ここで、境界条件について考える。板に作用する外力を(1)板の上、下面に働く外力が同符号、(2)異符号、の2つに分解する。これに対応して、境界条件を満たす振動方程式は2つの方程式系に分けることが出来る。ただし、この先の議論では、自由振動について考えるので、外力は0とする。これらのことを考慮して、方程式を整理すると、

$$\begin{cases} S_T L_t^2 \{ L_t^2 c_T^4 S_T c_L + 4 L_t^2 (L_t^2 \alpha^2 S_T c_L - L_t^2 \alpha^2 S_L c_T) \} u_0 = 0 \\ S_T L_t^2 \{ L_t^2 c_T^4 S_T c_L + 4 L_t^2 (L_t^2 \alpha^2 S_T c_L - L_t^2 \alpha^2 S_L c_T) \} v_0 = 0 \\ (L_t^2 c_T^4 S_T c_L + 4 L_t^2 (L_t^2 \alpha^2 S_T c_L - L_t^2 \alpha^2 S_L c_T)) w_1 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} h c_T \{ L_t^2 S_L + 4 c_T^4 L_t^2 L_t^2 \alpha^2 (S_L c_T - S_T c_L) \} u_1 = 0 \\ h c_T \{ L_t^2 S_L + 4 c_T^4 L_t^2 L_t^2 \alpha^2 (S_L c_T - S_T c_L) \} v_1 = 0 \\ h \{ L_t^2 S_L + 4 c_T^4 L_t^2 L_t^2 \alpha^2 (S_L c_T - S_T c_L) \} w_0 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

が得られる。ただし、

$$u_0 = \xi_1|_{x_3=0}, v_0 = \xi_2|_{x_3=0}, w_0 = \xi_3|_{x_3=0} \quad (14)$$

$$u_1 = \alpha_3 \xi_1|_{x_3=0}, v_1 = \alpha_3 \xi_2|_{x_3=0}, w_1 = \alpha_3 \xi_3|_{x_3=0}$$

$$C_i = \cos(L_t h / 2), S_i = (L_t h / 2)^{-1} \sin(L_t h / 2), i = T \text{ or } L \quad (15)$$

である。(12)式で表される波は伸長波(extensional wave)、(13)式で表される波は曲げ波(flexural wave)と呼ばれる。(12),(13)式は自由振動の厳密な方程式である。

3. 板の振動に関する近似方程式

2.で得られた厳密な振動方程式は、式(15)から明らかなように調和関数の中に微分演算子を含んでおり、このままでは取扱にくい。このsin, cos関数をBache,Hegemire[1]らは、補正係数を含んだべき級数で展開している。しかし彼らの方法では、高次の近似に対しては補正係数を求める計算が困難になる。

そこで、本報では次の形の展開をする。

$$C_L = \prod_{i=1}^n (1 - L_t (L_t h / 2)^{2i}), \quad S_T = \prod_{i=1}^n (1 - m_{Ti} (L_T h / 2)^{2i}) \quad (16a)$$

$$S_L = \prod_{i=1}^n (1 - m_{Li}(L_i h/2)^2), \quad C_T = \prod_{i=1}^n (1 - l_{Ti}(L_i h/2)^2) \quad (16b)$$

ただし、nは近似の次数、 $l_{Li}, l_{Ti}, m_{Li}, m_{Ti}$ は補正係数である。

4. 補正係数の決定法

補正係数は、波数kが0に近いときの自由振動の周波数 ω 及び群速度を厳密解と近似解で一致させることによって決定する。ここでは、伸長振動の場合についてその決定法を述べる。

いま、 x_1 方向の正弦波列

$$u_0 = U_0 \exp[i(\omega t + kx_1)] \quad (17)$$

を仮定し、(12)式にこれを代入すれば伸長振動に関する周波数方程式が得られる。これは、2つに分離することが出来て、次のように書ける。

$$\begin{aligned} [(\omega^2/c_T^2 - 2k^2) \sin(\beta h/2) \cos(\alpha h/2) \\ + 4k^2 \alpha \beta \sin(\alpha h/2) \cos(\beta h/2)] = 0 \quad (18) \\ k\beta^2 \sin(\beta h/2) = 0 \quad (19) \end{aligned}$$

ただし、

$$\alpha^2 = -k^2 + \omega^2/c_L^2, \quad \beta^2 = -k^2 + \omega^2/c_T^2 \quad (20)$$

(18)は圧縮モード(Compressional Modes)、(19)は表面せん断モード(Face Shear Modes)に対する周波数方程式である。

次に、近似の周波数方程式について考える。式(18),(19)を(16a)と(16b)を用いて展開すれば、

$$\begin{aligned} \beta^2 (\omega^2/c_T^2 - 2k^2)^2 \prod_{i=1}^n (1 - m_{Ti}(h/2)^2 \beta^2) \left(1 - l_{Li}(h/2)^2 \alpha^2 \right) \\ + 4k^2 \alpha^2 \beta^2 \prod_{i=1}^n (1 - m_{Li}(h/2)^2 \alpha^2) \left(1 - l_{Ti}(h/2)^2 \beta^2 \right) = 0 \quad (21) \\ k\beta^2 \prod_{i=1}^n (1 - m_{Ti}(h/2)^2 \beta^2) = 0 \quad (22) \end{aligned}$$

のように近似の周波数方程式を求めることが出来る。

さて、Compressional Modesの厳密、近似の周波数方程式で、 $k \rightarrow 0$ の時の解を等置すると、二種類の補正係数が決定できる。それは、

$$l_{Li} = (2(2i-1)\pi)^2 \quad (23)$$

$$m_{Ti} = (1/i\pi)^2 \quad (24)$$

である。すなわち、この方法によれば、二種類の補正係数については任意の次数についての値が(23),(24)式から求められる。

次に(18),(21)式をkで微分し、 $k \rightarrow 0$ において得られた群速度を等置すると、残りの補正係数を決定する式

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n \left\{ 1 - m_{Lj}((2i-1)\pi/2)^2 \right\} \left\{ 1 - l_{Tj}((2i-1)\pi/2)^2 \right\} = \\ 4A/(2i-1)\pi \prod_{j=1}^n \left\{ 1 - ((2i-1)A/2j)^2 \right\} \\ \prod_{j=i}^n \left\{ 1 - ((2i-1)/(2j-1))^2 \right\} \cos((2i-1)\pi A/2) \quad (25) \\ \prod_{j=1}^n \left\{ 1 - m_{Lj}(i\pi/A)^2 \right\} \left\{ 1 - l_{Tj}(i\pi)^2 \right\} = \\ -2A/i\pi \prod_{j=1}^n \left\{ 1 - (2i/(2j-1)A)^2 \right\} \prod_{j=i}^n \left\{ 1 - (i/j)^2 \right\} \tan(i\pi/A) \quad (26) \end{aligned}$$

$$A^2 = \alpha^2/c_T^2 \quad (27)$$

が求められる。ただし、2次以上の理論では(25),(26)式は数値計算によって求めなければならない。

5. 周波数スペクトルによる近似の評価

前節で求められた補正係数を用いた近似方程式の評価を行うために厳密解と近似解の周波数スペクトルを比較する。 $\nu=0.4$ の時、Compressional Modesについては $k \rightarrow 0$ の時の解について小さい方から3つ、Face Shear Modesについては、小さい方から2つの解について波数kと周波数 ω の関係をFig.1に示す。グラフの実線が厳密なもの、破線が1次の近似理論で、Bache, Hegemier[1]らが求めたものと同じものである。一点鎖線は2次の近似理論のスペクトルである。ただし、kと ω は無次元化してある。

Fig.1を見ると、一般に次数があがれば精度がよくなるのが解る。特に、Compressional Modesの大きい方の2つの解でそのことが顕著に現れている。

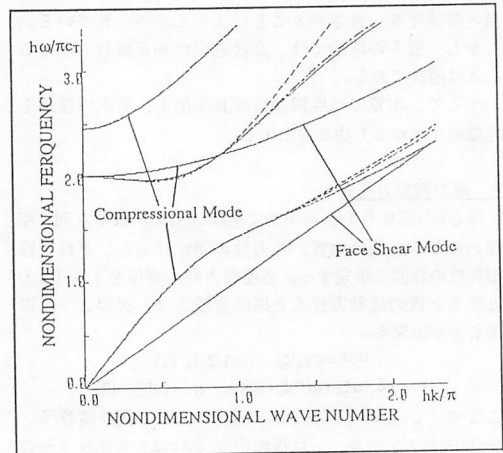


Fig.1 伸長振動の周波数スペクトル

6. おわりに

本報では、板の振動の基礎方程式から、伸び、曲げに関する厳密な振動方程式を導き、この振動方程式に含まれる微分演算子を含むsin,cos関数を級数展開して近似方程式を求めた。

近似方程式の中に含まれる厳密な理論との食い違いを修正する補正係数を組織的に求める方法を示した。

また、得られた近似方程式の精度を周波数スペクトルを用いて検討した。

参考文献

- [1] Bache, T.C. and Hegemier, G.A., "On Higher-Order Elastodynamic Plate Theories," Journal of Applied Mechanics, Vol.26, Trans. ASME, Vol.81, Series E, 1959, p561-569.