402 カルバック情報量基準に基づく曲線・曲面の最適補間の研究
－（第４報）曲面の最適補間点の位置決め－

旭川高専○渡辺美知子　古川正志　北大工　嘉数侑昇

要　旨

設計者がモデルを表現する場合、知識・経験・直感に頼ることなく最適なモデルを行うことが望ましい。形状設計問題では、与えられた初期モデルの曲線・曲面の補間法を比較・評価できる基準が必要である。本報告では、最適補間モデルを評価する基準としてカルバックの情報量から導かれる情報量基準ＡＩＣを利用し、Ｂ－スプライン補間曲面における最適表現式を定める方法を提案し、その数値実験例を示す。

１．はじめに

自由曲線と曲面の補間を行う場合、補間点数・補間点の位置・補間表現式のパラメータが問題となる。既に曲線や曲面の表現モデルの良さを評価できる基準として情報量基準ＡＩＣ(Akaike`s Information Criteria)を採用し、Ｂ－スプライン曲線と曲面を表現する最適補間点、補間点から導かれる制御点、パラメータの次数が存在することを報告した。

本報告ではこれらの結果を利用し、最適補間点、補間点から導かれる制御点、パラメータの次数を用いて曲線・曲面を生成し、1.端点の曲率改善2.補間点の移動3.補間点の挿入の導入で最適表現式の決定法を提案しその有効性を確かめる。

２．カルバックの情報量基準とＡＩＣ

カルバックの情報量基準から導かれる統計量としてのＡＩＣは以下で定義される。

$$\mathrm{AIC}=-2\,[\text{モデルの最大対数尤度}]+2\,[\text{モデルの自由パラメータ数}] \tag{1}$$

ＡＩＣは、真のモデルと近似モデルの誤差ε_i($i=1,2,\cdots,n$)がガウス分布の密度関数に従うとすれば、標準偏差をσを用いて、

$$\mathrm{AIC}=N\{\log 2\pi+\log^n\sigma_{max}{}^2+1\}+2\,[\text{モデルのパラメータ数}] \tag{2}$$

となる。ここで、定数項を取り除くとＡＩＣは、以下のように表され、

$$\mathrm{AIC}=N\log\varepsilon_i{}^2+2\,[\text{モデルのパラメータ数}] \tag{3}$$

この式（３）をＢ－スプライン曲面に適用するとＡＩＣは、以下のように定義される。

$$\mathrm{AIC}=NM\log(s)+4(N+k+1)(M+L+1) \tag{4}$$

ここで、N，ＭはＡＩＣ補間点測定回数、Ｓは残差２乗平均を最小にする値である。この結果、式（４）のＡＩＣ数値が低いほど最適曲面であると評価される。

３．ユニホームＢ－スプライン補間曲面

Ｂ－スプライン曲面は、カルテジアン積曲面として以下に定義される。

$$Q(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_{i+1,j+1}N_{i,k}(u)M_{j,L}(v) \tag{5}$$

但し、

$$N_{i,1}(u)=0\quad(x_i\leqq u<x_{i+1})$$

$$N_{i,1}(u)=1\quad(u<x_i\text{ または }u\geqq x_{i+1})$$

$$N_{i,k}(u)=\frac{(u-x_i)N_{i,k-1}(u)}{(x_{i+k-1}-x_i)}+\frac{(x_{i+k}-u)N_{i+1,k-1}(u)}{x_{i+k}-x_{i+1}}$$

$$M_{i,1}(v)=0\quad(y_j\leqq v<y_{j+1})$$

$$M_{i,1}(v)=1\quad(v<y_j\text{ または }v\geqq y_{j+1})$$

$$M_{i,L}(v)=\frac{(w-y_j)\,M_{j,L-1}(v)}{(y_{j+L-1}-y_j)}+\frac{(y_{j+L}-w)M_{j+1,L-1}(v)}{y_{j+L}-y_{j+1}}$$

$$(0\leqq u\leqq u_{max},\ u_{max}=n-k+2)$$

$$(0\leqq v\leqq v_{max},\ v_{max}=m-L+2)$$

である。ここで、ｘとｙは$x_i\leqq x_{i+1}$、$y_j\leqq y_{j+1}$であり、変数ノットベクトルの要素は整数値である。このノットベクトル値に加えて、位数ｋとＬを任意に定義する。

４．Ｂ－スプライン曲線による点列補間

$P_0,P_2,\cdots,P_n$の点列を補間するとき、Ｂ－スプライン発生ポリゴン点は位数Ｒとノットベクトルt_i($i=0,1,\cdots,n$)を用いて、以下のように拡張ノットベクトルを定める。

$$t_i=a_0=0\qquad(i=0,1,2,R-1)$$

$$t_{i+k}=a_{i+1}=\Sigma c_j\qquad(i=0,1,\cdots,R-2)$$

$$t_{i+n+k-1}=a_n=\Sigma c_j\qquad(i=0,1,2,R-1)$$

Ｂ－スプライン関数は、各ノットにおいてＲ－１個の非零となるＢ－スプライン関数が存在し、ノットt_iにおいて曲線P_{i-k-1}を補間するとき、以下の式が成立しなければならない。

$$P_{i-R-1}=S_{i-R-1,R}(a_{i-R-1})Q_{i-R-1}+S_{i-R-2,R}(a_{i-R-1})Q_{i-R-2}+S_{i-R-3,R}(a_{i-R-1})Q_{i-R-3} \tag{6}$$

$$(R-1\leqq i\leqq n+R-1)$$

ここで、$Q_0, Q_1, \cdots, Q_{n+R-2}$は未知ベクトルであり、n点を補間するにはR－2条件を追加する必要がある。ここでは、端点において次の２条件を付加する。

$$Q_1 = P_0,\ \ Q_{n+1} = P_n \tag{7}$$

$$\begin{aligned} 0 &= S_{i-R,R}(a_{i-R})Q_{i-R} + S_{i-R-1,R}(a_{i-R}) \\ &\quad Q_{i-R-1} + S_{i-R-2,R}(a_{i-R})Q_{i-R-2} \\ 0 &= S_{n,R}(a_n)Q_n + S_{n+1,R}(a_n)Q_{n+1} \\ &\quad + S_{n+2,R}(a_n)Q_{n+2} \end{aligned} \tag{8}$$

５．最適表現式の決定法

以下の方法でu、v方向に点列補間の繰り返しとして順次適用して最適表現を求める。

(1) 端点での曲率の近似

1. 既に述べた方法で補間を行う。
2. 端点(R_0)と(R_n)の一つ隣の点(R_1)と(R_{n-1})を1.より求める。
3. 端点と一つ隣の中点を求め、その垂線ベクトルを求める。
4. 1.の接線ベクトルと3.の垂線ベクトルから交点(R_t)を求める。
5. R_1、R_2、R_3を制御点として円錐曲線を求め、その二次微分を端点の曲率として再補間を行う。

(2)補間点の移動

1. 補間点の各区間点でＡＩＣを求める。
2. ＡＩＣの比に比例して補間点の区間幅を定める。
3. αを最大区間幅($0 \leqq \alpha \leqq 1$)で最大区間の補間点を移動し、残りの区間幅を比に合わせて調節する。
4. 再補間を行い、1.に戻る。もし、全体のＡＩＣが改善されなければ手続きを終了する。

(3)補間点の挿入

1. 補間点の各区間点のＡＩＣを求める。
2. 最大ＡＩＣの区間に補間点を挿入する。
3. 再補間を行い、1.に戻る。もし、全体のＡＩＣが改善されなければ手続きを終了する。

４．数値実験

本実験では、初期モデルに１／４球を用い、この真のモデルの補間点をu，v方向にそれぞれn×m点生成し、補間点からB－スプライン曲面生成のポリゴン点を発生する。このポリゴン点よりB－スプライン曲面のＡＩＣを評価し、両端点での曲率の改善、補間点の移動、補間点の挿入を行いＡＩＣ値の変化を考察する。

表１は、B－スプライン曲面の端点条件を多重点とした場合と曲率０の条件を付加した場合のu方向m列のＡＩＣ値の変化の様子である。ＡＩＣの測定点は、１００点である。この時、ＡＩＣの値が小さい方が真のモデルを近似している。

表２は、両端点に円錐曲線の曲率の条件を採用し補間を行う。そして、ＡＩＣ値の高い補間点間に対して補間点の移動と再補間を行い、ある基準に達するまで繰り返して補間点の移動をu方向のm列に対して行った実験例である。

表３は、表２と同じ端点条件を用い、ＡＩＣ値の高い補間点に対して補間点の挿入を行い、ある基準に達するまで繰り返して補間点の挿入をu方向のm列に対して行った実験例である。

５．おわりに

実験の結果、端点条件は曲率を零とし、更に円錐曲線の二次微分を与えるとＡＩＣが改善される。ＡＩＣ値の高い補間点に対して、補間点の移動を行うとＡＩＣ値は減少と増加を繰り返しながら減少していく。また、補間点の挿入を行うとＡＩＣ値はコンスタントに減少していくことが分る。

列＼端点	多重点	曲率０
1	553.34	256.31
2	213.74	94.79
3	92.49	169.22
4	242.76	212.88
5	299.96	183.37

表１．５×５補間点によるu方向m列のＡＩＣ値変化

列＼回	1	2	3	4	5	6	7
1	599.52	378.37	585.09	396.50	136.32	396.50	256.85
2	591.57	364.66	580.67	406.94	115.90	406.94	270.12
3	566.38	318.65	561.67	417.72	112.71	417.72	305.21
4	518.70	215.70	530.29	422.10	209.14	422.10	346.38
5	433.44	-47.11	454.79	407.11	299.01	176.37	66.47

表２．補間点移動法によるu方向m列のＡＩＣ値変化

列＼回	1	2	3	4	5	6	7
1	599.52	570.70	507.88	440.06	292.40	282.34	273.33
2	591.57	562.76	499.94	432.12	284.46	274.40	265.38
3	566.38	537.56	474.75	406.93	259.26	249.21	240.19
4	518.70	489.88	427.07	359.25	211.58	201.53	192.51
5	433.44	404.62	341.81	273.99	126.33	116.28	107.25

表３．補間点挿入法によるu方向m列のＡＩＣ値変化