411　ニューラル・ネットワークによる自由曲面の生成

旭川高専　○古川正志

要旨

自由曲面の作成は、多くの場合パッチ曲面の結合として表現される。この結合において、各パッチの接線ベクトル、ツイスト・ベクトルの決定は重要な問題となる。本研究ではツイスト・ベクトルを不要とするBrown 曲面の使用を前提とし、３次元スプライン曲線の接線ベクトルの決定をニューラル・ネットワークによって自動決定させる手続きを定式化する。

１．はじめに

近年、人工知能の分野のみならず、計算力学や最適化問題の解法[1]としてニューラル・ネットワークが注目を集めている。これはニューラル・ネットワークの持つ学習、自律性、自己組織化の性質を利用したものである。自由曲線・自由曲面の分野では、多くの場合、セグメントやパッチを結合した表現が用いられる。このときに問題となるのは接線ベクトルやツイストベクトルをいかに定めるかである。本研究では、まず、自由曲線の接線ベクトルの決定にニューラル・ネットワークを使用した表現式を定式化する。ついで、これを自由曲面に拡張した方法を定式化する。

２．３次スプライン曲線のニューラル・ネットワークによる定式化

今、$P=[P_1, P_2, \cdots, P_n]$なる点群が与えられたとする。各点での接線ベクトルを$P=[P_1, P_2, \cdots, P_n]$と置く。このとき、曲線セグメント$Q_i(u)$は、

$$Q_i(u) = H(u)^T Q_i \tag{1}$$

と置ける[2]。ここで、

$$H(u) = [1-3u^2+2u^3 \quad 3u^2-2u^3 \quad u-2u^2+u^3 \quad -u^2+u^3]^T$$
$$Qi = [P_i \quad P_{i+1} \quad P_i \quad P_{i+1}]^T$$

である。

接線ベクトルP_iを各点群P_iの関数とし、

$$P_i = f(P_1, P_2, \cdots, P_n) \tag{2}$$

と置く。これをテーラー級数に展開し２次以降の項を打ち切ると[3]、

$$P_i = \sum_{x=1}^{n} a_{ix} P_x \tag{3}$$

と書くことができる。ここで、各点にニューラル・ネットワークのユニット$U_{ik}(i, k=1, 2, \cdots, n)$を割り当て、ユニット間の荷重を$w_{ixk}$とし、

$$a_{ix} = \sum_{k=1}^{n} w_{ixk} U_{ik} \tag{4}$$

と置く。

各点での曲率をK_iとすれば、

$$K_i^2 = \frac{(P_i^T P_i)^2 - (P_i^T P_i)^2}{(P_i^T P_i)^{3/2}} \tag{5}$$

が得られる。ここで、$P_i^T P^i = 0$とすると、

$$K_i^2 = (P_i^T P_i)^{1/2} \tag{6}$$

となり、k_i^4に式(3)、(4)を代入すると、

$$K_i^4 = \sum_{x=1}^{n} \sum_{y=1}^{n} P_x^T P_y \sum_{k=1}^{n} (w_{ixk} \cdot U_{ik}) \cdot \sum_{h=1}^{n} (w_{iyh} \cdot U_{ih}) \tag{7}$$

となる。各点の曲率の４乗の和をエネルギー関数E1とし、

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i^4 \tag{8}$$

と置く。ここで、$P_i^T P_i$は一定だから、エネルギー関数は、

$$E_1 = E_1(w_{ixk}, U_{ik}) \tag{9}$$

となる。ここで、各点の曲率が最小になるように接線ベクトルが定まるとすれば、エネルギー関数は最小化され、この手続きは

$$\min_{U} \; E_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{x=1}^{n} \sum_{y=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (w_{ixk} \cdot U_{ik}) \cdot \sum_{h=1}^{n} (w_{iyh} \cdot U_{ih}) \tag{10}$$

となる。ただし、$U=[U_{ik}; i, k=1, 2, \cdots, n]$である。時刻tから時刻(t+1)へのユニットの状態更新を

$$U_{ix}(t) = a_{ix}(t), \quad a_{ix}(t+1) = \phi(U_{ix}(t)) \tag{11}$$

とし、ユニットの時間変化は最急降下の方向と一致させれば、

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{dE_1}{da_{ix}} \tag{12}$$

と置ける。ここで、$\phi(U_{ix}(t))$は$U_{ix}(t)$のシグモイド関数であり、$\phi(x) = 1/\{1 + \exp(-2x/T)\}$と表現される

このとき、エネルギー関の時間変化は、

$$\frac{dE_1}{dt} = -\frac{dE_1}{da_{ix}}\frac{da_{ix}}{dU_i}\frac{dU_i}{dt}$$

$$= -\left(\frac{dE_1}{da_{ix}}\right)^2 \frac{d\phi(a_{ix})}{dt} < 0 \quad (13)$$

となり、シグモイド関数は単調増加関数だからエネルギー関数は時間変化と共に減少する。

式(7)は、明らかに全ての点で曲率が0となるときに最小エネルギー値となる。このとき、式(1)から導かれる曲線は点群を単に直線のみで結合したものとなる。そこで、2次微分を保障するために、式(3)の係数は、

$$\sum_{x=1}^{n} a_{ix} = \sum_{x=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_{ixk}U_{ik} = 1 \quad (14)$$

の関係を持つものとする。この関係は、曲線のテンション、バイアス制御4)で保持されている。式(14)を制約条件とし、このエネルギー関数を

$$E_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{x=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} w_{ixk}U_{ik} - 1\right)^2 \quad (15)$$

と置き、新たにエネルギー関数を

$$E_3 = A/2 \cdot E_1 + B/2 \cdot E_2 \quad (16)$$

とする。

3．ホップフィールド・モデルとの比較

ニューラルネットワークのホップフィールド・モデルは以下のように示される。

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}(C_{ikh} \cdot U_{ik}U_{ih}) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} I_{ik}U_{ik} \quad (17)$$

$$V_{ik}(t) = \sum_{h=1}^{n} C_{ikh} \cdot U_{ih} + I_{ik} \quad (18)$$

$$U_{ik}(t+1) = \phi(V_{ik}(t)) \quad (19)$$

式(16)と(17)を定数項を無視して比較すると、

$$C_{ikh} = \frac{-(A+B)}{2}\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n} w_{ixk} \cdot w_{iyh} \quad (20)$$

$$I_{ik} = -\frac{B}{2}\sum_{x=1}^{n} w_{ixk} \quad (21)$$

を得る。

4．Brown 曲面による曲面の生成

パッチの生成にツイスト・ベクトルを不要とする場合、曲面はパッチ4隅のu方向とv方向に関する接線ベクトルのみで生成できる。このような曲面としてはBrown曲面が知られている[4]。いま、与えられた格子点群を$Q=[Q_{i,j}; i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,m]$とし、$Q_{i,j}$、$Q_{i,j+1}$、$Q_{i+1,j}$、$Q_{i+1,j+1}$で作成されるパッチを$Q_{i,j}(u,v)$とする。このとき、

$$Q_{i,j} = g_1(u,v)H^T(v)Q_i(u) + g_2(u,v)H^T(u)Q_j(v) \quad (22)$$

$$g_1(u,v) = v^2(1-v)^2/f(u,v)$$

$$g_2(u,v) = u^2(1-u)^2/f(u,v)$$

$$Q_i(u)^T = [P_i(u), P_{i+1}(u), P_i(u), P_{i+1}(u)]$$

$$Q_j(v)^T = [P_j(v), P_{j+1}(v), P_j(v), P_{j+1}(v)]$$

$$f(u,v) = v^2(1-v)^2 + u^2(1-u)^2$$

である。ここで、$P_i(u)=H(u)^TQ_i$, $Q_i^T=[Q_{i,j}\ Q_{i,j+1}\ Q_{i,j}\ Q_{i,j+1}]$と置けば、ニューラル・ネットワークを利用してu方向の接線ベクトルを求め、式(1)を適用して$P_i(u)$を決定できるから、$Q_i(u)$を定められる。。また、同様にして$Q_j(v)$を定めることができ、パッチを完全に決めることができる。

5．おわりに

3次スプライン曲線の接線ベクトルの決定ににニューラル・ネットワークのホップフィールド法を利用する定式化を行い、これを拡張して自由曲線を生成する方法を開発した。この3次スプラインのニューラル・ネットワークによる定式化に当たって、曲線の結合点での曲率は$P_i^TP_i=0$を仮定したので、円弧に近い結合となることが予想される。曲面生成法としてBrown曲面を採用したためFパッチ曲面に使用されるようなツイスト・ベクトルの算定は行っていない。ツイスト・ベクトルはテイラー級数による近似によって、接線ベクトルの線形和で表現可能である。これをニューラル・ネットワークとし接線ベクトルに代入すれば、より複雑な定式化が予想される。また、このとき曲率の第2項を省略しない曲率最小の評価をおこなえる。今後、Fパッチ曲面に対してこのような手法を開発する予定である。

なお、本研究は平成3～4年度の文部省科学研究費補助金試験研究(b)(2)課題番号03555028によって行ったものであることを付記する。

参考文献

1)矢川元基編；ニューラルネットワーク、培風館(1992).

2)I.D.FAux and M.J.PRATT；Computatinal Geometry for Design and Manufacturing、ELLIS HORWOOD(1979)P126

3)F.ベルタランフィ；一般システム理論、みすず書房(1978)P51.

4)M.WATANABE, M.FURUKAWA and Y.kAKAZU；Local Modification of a Free-formed Surface Preseaving Shape Data、Proc. of INTERTECHNO'90(1990)P536