

要旨

歯車やカムといったいわゆる接触運動によって一方の運動を他方へ伝える要素の解析には、多くの理論が開発されてきた。中でも包絡線理論は数学的表現や計算が容易で応用が広い理論として知られている。⁽¹⁾ しかし、接触運動をする要素の中には自転と公転をするいわゆる多重周期運動のように包絡線理論の適用出来ない運動があり、この運動による包絡線を求めるのが本テーマの目的である。今回は楕円の多重周期運動を報告する。

1. はじめに

包絡線理論を簡単に説明しておく。包絡線理論は数学的には接線法ともいえる理論である。図1においてパラメータ (θ) 1つで曲線を描き、パラメータ (t) を2つ導入すると曲線群を描く。言い替えると、曲線群を描く2つ目のパラメータは運動を定めるパラメータである。包絡線が存在するためには運動曲線上の接線と曲線上の接線がベクトル的に等しくなければならない。以上のことを具体的に式で表す。

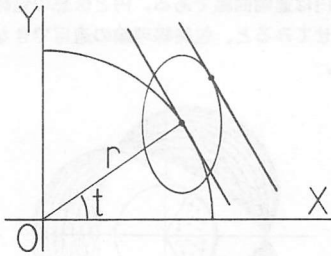


図1 包絡線理論

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos(\theta) + r \cdot \cos(t) \\ y &= b \cdot \sin(\theta) + r \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$$

(a, b = 楕円の径 ; r = 円の径)

上式のJはヤコビアンを表し、包絡線が存在するための条件である。

2. 包絡線理論の適用できない運動

図2は楕円の中心が円上にあり、自転しながら公転するいわゆる多重周期運動である。自転、公転とも左回りを正回転とする。

図3は運動をより細かく描き曲線群による包絡線の生成を視覚的に表示したものである。図3では仮想的包絡線しか存在しないが、外接包絡線上の点Pでは接線が2本引ける。また運動曲線上の接線の傾きが単調増加するのに対して内接包絡線上での接線の傾きは減少、増加、減少と変化しておりいずれも包絡線理論の適用できないことを示している。

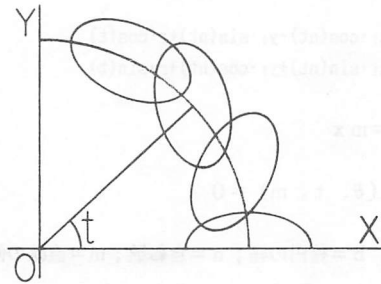


図2 楕円の多重周期運動

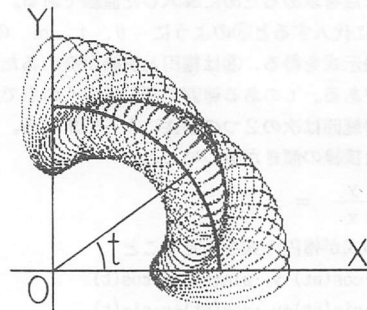


図3 仮想包絡線の生成

3. 多重周期運動機構の包絡線解析

図4によって多重周期運動機構の包絡線の求め方を説明する。包絡線は曲線上の一点が連なって形成されるとみることができる。曲線上の一点を求めるために新たに直線を導入する。曲線上の点は直線と楕円の連立方程式として求めることができる。このことを式で表示する。

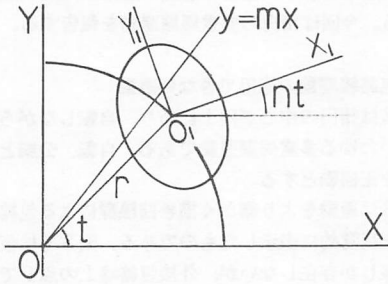


図4 多重周期運動の包絡線解析法

$$x_1 = a \cdot \cos(\theta)$$

$$y_1 = b \cdot \sin(\theta)$$

$$x = x_1 \cdot \cos(nt) - y_1 \cdot \sin(nt) + r \cdot \cos(t)$$

$$y = x_1 \cdot \sin(nt) + y_1 \cdot \cos(nt) + r \cdot \sin(t) \quad ①$$

$$y = m x \quad ②$$

$$f(\theta, t, m) = 0 \quad ③$$

(a, b = 楕円の径; n = 自転数; m = 直線の傾き)

①は θ, t をパラメータとする楕円を表す。②は楕円上の一点を求めるために導入した直線である。

①を②に代入すると③のように θ, t, m の陰関数の表示式を得る。③は楕円と直線が交わるための条件式である。tのある範囲で楕円は多くの点で交わるがその範囲は次の2つの条件によって求まる。

①直線と接線の傾きが等しいこと

$$\frac{dy}{dx} = m$$

②直線の式が楕円の式を満たすこと

$$x = x_1 \cdot \cos(nt) - y_1 \cdot \sin(nt) + r \cdot \cos(t)$$

$$y = x_1 \cdot \sin(nt) + y_1 \cdot \cos(nt) + r \cdot \sin(t)$$

$$y = m x$$

上式からmを消去してtを求めればよい。

交点は図5に示すように多数求まるが最大値が外接包絡線を決定し、最小値は内接包絡線を決定する。

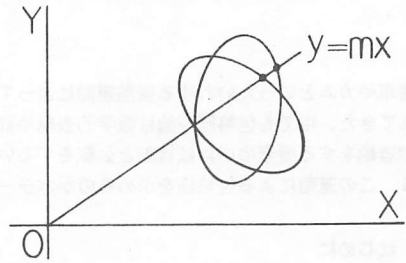


図5 包絡線の決定法

4. 応用例

包絡線理論の適用できない例の1つにロータリエンジンがある。ロータリエンジンはハウジング曲線に自転と公転を与え、その包絡線としてロータ曲線を求めるものである。

図6は曲線群によって生成されたロータの図である。内部の円は運動曲線である。円と仮想的包絡線を照らしあわせてみると、包絡線理論の適用できないことが分かる。

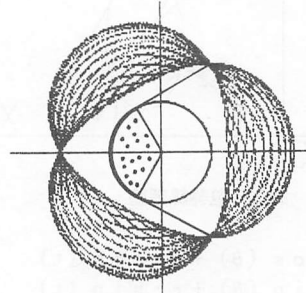


図6 ロータリエンジンの解析

5. おわりに

機構の運動に要素の自転が加わると包絡線理論が適用できなくなるが、直線を導入した解析法を用いることによって自転数に関係なく包絡線を求めることができる。

本理論は数値解析法であるが、次報において、より解析的な理論を報告する。

6. 参考文献

(1) 堀内義和; 歯車工学の小径をたずねて

(S・49 沖電気工業株式会社)