113　線型誤差解析法による幾何形状評価システムの誤差要因推定

北海道大学工学部　○高瀬 慎一　田中 文基　岸浪 建史
（株）ニコン　　　　岡本 英明

要旨
幾何形状評価システムには、三次元測定機で測定した点データから数学モデルを計算するための様々なアルゴリズムが存在するため、システムにより計算された製品形状の数学モデルが異なる。その要因の一つとして丸め誤差がある。そこで本研究では、線形誤差解析法を用いて誤差要因（丸め誤差）を推定する。

1. はじめに

幾何形状評価システムでは、三次元測定機により測定された点データから、製品形状の数学モデルを計算する。その際に、最小自乗法や最小領域法などに基づいた様々なアルゴリズムや実現法が存在し、その評価アルゴリズムの違いや、計算機の精度の違いのため、同一の点データに対し異なる計算結果となる。これは各々の評価アルゴリズムや、計算機精度のため計算過程で複数の誤差を生じるためである。この誤差の中で丸め誤差は、線型誤差解析により影響を解析することができる。本研究では誤差要因のうち丸め誤差を対象とし、線形誤差解析を用いて丸め誤差の影響を推定する。具体的に直線の線形最小自乗法問題を取り上げる。

2. 幾何形状評価システムの評価

一般に、同じ点データ分布でも異なる幾何形状評価システムでは計算結果が異なる場合がある。図1 に、幾何形状評価の計算結果に影響を与える要素モデルを示す。すなわち、影響を与える要素には、最適化アルゴリズム、最適化基準、計算機精度[1]、入力点データとがある。最適化基準とは、最小自乗法や最小領域法等の選択の違いであり、最適化アルゴリズムとは形状の表現法、探索アルゴリズム等の違いであり、点データとは、点の分布範囲などの違いである。

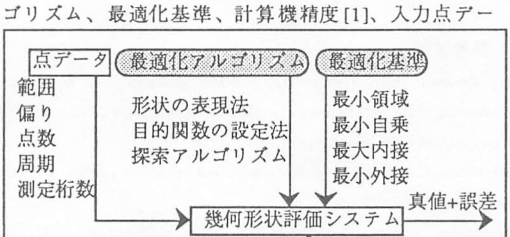

図1. モデル化した幾何形状評価システム

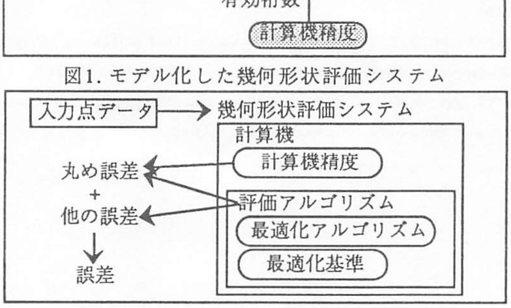

図2. 幾何形状評価システムの丸め誤差

計算機は、評価アルゴリズムの計算過程においては有限桁計算にともなって発生する丸め誤差が生じる。丸め誤差は、幾何形状評価システム内で、図2 に示すように計算機特有の計算機精度、評価アルゴリズムから生じる誤差のうちの一つである。

3. 線形誤差解析

点データから製品形状の数学モデルを計算する際、通常その性質上、非線型最適化問題となるが、一般に線形近似による解法がよく用いられており、最終的に連立一次方程式に帰着される場合が多い。

線形誤差解析[2]は、連立一次方程式を解く場合の有限桁計算にともなって発生する誤差を解析する手法である。本研究では、この手法を線形最小自乗問題における幾何形状評価システムに適用する。その概念を図3に示す。線形誤差解析では、最適化基準として線形最小自乗法に限定した場合、入力の点データの違いによる丸め誤差への影響、有効次数の違いによるの丸め誤差への影響、連立一次方程式の解法の違いによる丸め誤差への影響を解析できる。

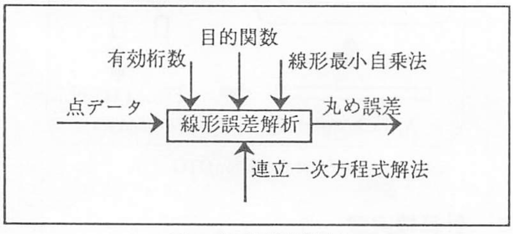

図3. 線形誤差解析

4. 線形最小自乗法の誤差解析

4.1 問題設定

線形最小自乗法問題を解く場合、種々の数値解法がある。計算が無限桁の精度で行われるのならば同じ解を得るが、実際の計算は有限の桁数で行われるため、

丸め誤差が生じる。ここでは、y軸方向の残差の自乗を最小化する線形最小自乗法を例にとり、図4のような問題設定をする。ここで計算機精度は単精度、倍精度とし、連立一次方程式の解法をLU分解とLDM^T分解とする。このような設定で同一の点データを与えたときの線形誤差解析による丸め誤差の影響を推定する。

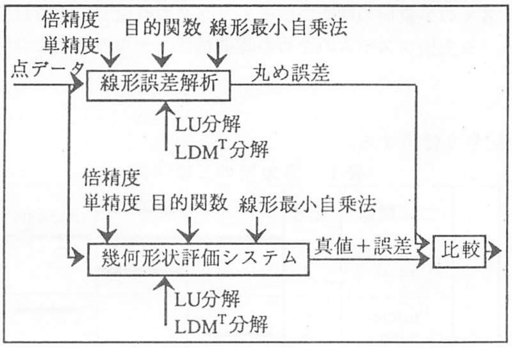

図4. 線形誤差解析を用いた解析

ここで例として、直線を求める問題を考える。有効次数を二進で23桁(単精度)または二進で52桁(倍精度)とする。線形最小自乗により傾きとy切片を計算する場合、最終的に次の式を解くことになる。

$$Ax = b \qquad (1)$$

浮動小数点計算を行うため、(1)式の解は真値xではなく$\hat{x}$となる。すると、$\hat{x}$で成り立つ連立一次方程式は(2)式のように表せる。ハット記号は浮動小数点で計算されたことを示す。

$$(A+E)\hat{x} = b \qquad (2)$$

(1)式をLU分解で解いた場合の行列Eは（3）式のようになる。

$$|E| \le nu\left(3|A| + 5|\hat{L}||\hat{U}|\right) + O(u^2) \qquad (3)$$

また、(1)式をLDM^T分解で解いた場合の行列Eは(4)のようになる。

$$|E| \le nu\left(3|A| + 5|\hat{L}||\hat{D}||\widehat{M^T}|\right) + O(u^2) \qquad (4)$$

ここで、uは単精度で2^{-23}、倍精度で2^{-52}であり、$O(u^2)$は、単精度で2^{-23}、倍精度で2^{-104}なので無視できる。(3)式、並びに(4)式を(2)式に代入することにより、丸め誤差を推定することができる。

4.2 計算例

線型誤差解析を用い、サンプル点データとして表1に示すデータを与えた場合の、丸め誤差の推定する。表2では表1のデータの傾きとy切片の真値を示す。

表3では、表1のデータを基に、連立一次方程式の解法をLU分解とLDM^T分解で行った場合、計算機精度を単精度と倍精度で行った場合のEマトリックスを示す。これにより丸め誤差が推定される。

表1. サンプル点

サンプル	点1	点2	点3
1	(24.0 , 30.24)	(34.0 , 30.34)	(12.0 , 30.12)
2	(44.222 , 22.2111)	(4.222 , 20.2111)	(22.222 , 21.1111)
3	(24.0 , 30.24)	(12.0 , 30.12)	(2.0 , 30.02)

表2. サンプル点による傾き及びy切片の真値

サンプル	傾き	y切片
1	0.01	30.0
2	0.05	30.0
3	0.01	30.0

表3. サンプル点による丸め誤差の影響

サンプル	解法	精度	Eマトリックス
1	LU	単	$\begin{pmatrix} 2.2864340E-03 & 8.5592263E-05 \\ 8.3446493E-05 & 3.5762784E-05 \end{pmatrix}$
		倍	$\begin{pmatrix} 4.25881552198200E-12 & 1.59428026318200E-13 \\ 1.55431223430000E-13 & 6.66133814000000E-15 \end{pmatrix}$
	LDMt	単	$\begin{pmatrix} 2.2864340E-03 & 8.5592260E-05 \\ 8.3446493E-05 & 3.5762783E-05 \end{pmatrix}$
		倍	$\begin{pmatrix} 4.25881552198200E-12 & 1.59428026318200E-13 \\ 1.55431223430000E-13 & 6.66133814000000E-15 \end{pmatrix}$
2	LU	単	$\begin{pmatrix} 2.9917090E-03 & 8.6386197E-05 \\ 8.4240432E-05 & 3.5762784E-05 \end{pmatrix}$
		倍	$\begin{pmatrix} 5.57249236025533E-12 & 1.60906843386834E-13 \\ 1.56910040498634E-13 & 6.66133814700000E-15 \end{pmatrix}$
	LDMt	単	$\begin{pmatrix} 2.9917090E-03 & 8.6386199E-05 \\ 8.4240432E-05 & 3.5762784E-05 \end{pmatrix}$
		倍	$\begin{pmatrix} 5.57249236025533E-12 & 1.60906843386834E-13 \\ 1.56910040498634E-13 & 6.66133814700000E-15 \end{pmatrix}$
3	LU	単	$\begin{pmatrix} 8.9025490E-04 & 4.7445293E-05 \\ 4.5299527E-05 & 3.5762785E-06 \end{pmatrix}$
		倍	$\begin{pmatrix} 1.65282291093932E-12 & 8.83737527502000E-13 \\ 8.43769498620000E-14 & 6.66133814700000E-15 \end{pmatrix}$
	LDMt	単	$\begin{pmatrix} 8.9025490E-04 & 4.7445294E-05 \\ 4.5299527E-05 & 3.5762785E-06 \end{pmatrix}$
		倍	$\begin{pmatrix} 1.65282291093932E-12 & 8.83737527502000E-13 \\ 8.43769498620000E-14 & 6.66133814700000E-15 \end{pmatrix}$

5. おわりに

線形誤差解析を用いて、評価アルゴリズムと計算精度を変え丸め誤差の推定を行い、次の結論を得た。

(1)手法の違いより計算精度の取り扱いのほうが誤差に大きな影響を与える。

(2)単精度では手法の違いによりEマトリックスは異なるが、倍精度ではEマトリックスは同じである。

参考文献

[1] Theodre H.Hopp,"Computational Meteorology" , MANUFACTURING REVIEW (1993)

[2]Gene H.Golubほか,"Matrix Computations" (1989)