

k-diskウェーブレットによるポリゴンモデルの多重解像度近似とその特性評価

北海道大学大学院工学研究科 ○伊達宏昭 金井理 岸浪建史

要旨

CG・意匠設計・地形データなどにおいて複雑なポリゴンモデルを用いる機会が増え、ポリゴンモデルの多重解像度近似手法の一つとしてk-diskウェーブレットを用いた手法が提案されている。しかし、k-diskウェーブレットのパラメータであるdisk幅に依存して変化する多重解像度近似特性(データ圧縮率・近似精度・処理時間)は明らかにされていない。そこで本研究ではdisk幅の変化とポリゴンモデルの多重解像度近似特性間の関係を理論的・実験的に評価し明らかにする。

1.はじめに

CG・意匠設計・地形データなどにおいて、複雑な形状モデルを三角形で構成されるポリゴンにより表現する機会が多くなりつつある。しかし、このような形状モデルは、保存・転送・レンダリングが非常に高価で、必要に応じて解像度を任意に変更することが要求される。そこで、与えられたモデルの多重解像度近似手法の一つとしてdisk幅というパラメータを持つk-diskウェーブレットを用いた手法が提案されている[1]。しかしdisk幅に依存して変化する近似特性(データ圧縮率・近似精度・処理時間(解析・再構成時間))は議論されていない。そこで本研究ではk-diskウェーブレットのdisk幅の変化と、ポリゴンモデルの多重解像度近似特性を理論的・実験的に評価し、disk幅と近似特性間の関係を明らかにすることを目的とする。

2. ウェーブレットを用いた多重解像度近似

ウェーブレットを用いた多重解像度近似の概観を図1に示す。与関数 $f^{j+1}(x)$ の低解像度への近似を $f^j(x)$ 、近似の際失われた細部を $g^j(x)$ とすると、それらは(1)式で表現できる。

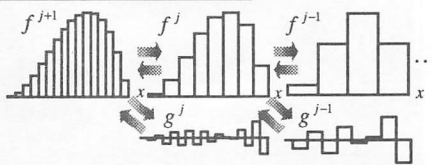


図1: ウェーブレットを用いた多重解像度近似

$$f^j(x) = \sum_i c_i^j \phi(2^j x - i), \quad g^j(x) = \sum_i d_i^j \psi(2^j x - i) \quad (1)$$

j は解像度レベルを表し、 c_i^j, d_i^j は係数、 ϕ^j, ψ^j はそれぞれ f^j, g^j を構成する基底関数でスケージング関数、ウェーブレットと呼ばれる。

与関数 $f^{j+1}(x)$ は(2)式で表される。

$$f^{j+1}(x) = f^j(x) + g^j(x) \quad (2)$$

$f^{j+1}(x)$ は(2)式を再帰的に用いて階層的に表現する事ができ、(3)式の多重解像度近似表現を得る。

$$f^{j+1} = f^j + g^j = \dots = f^0 + g^0 + g^1 + \dots + g^j \quad (3)$$

ウェーブレットを用いた3次元ポリゴンモデルの多重解像度近似 [1][2]では三角形の4対1統合を行いモデルを低解像度へ近似すると同時に、その際に失われた細部をウェーブレット係数として分離し、保存する。 V^{j+1} を解像度レベル $j+1$ における頂点座標値の行列、その低解像度への近似を V^j 、近似の際失われた細部を持つウェーブレット係数を W^j とすると、それらは解析フィルタ A^j, B^j を用いて(4)式より得られる(解析)。

$$V^j = A^j V^{j+1}, \quad W^j = B^j V^{j+1} \quad (4)$$

また、ポリゴンモデルの復元は(5)式により行われる(再構成)。

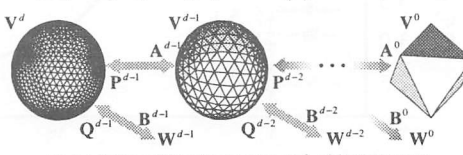


図2: 3次元ポリゴンモデルの多重解像度近似

$$V^{j+1} = P^j V^j + Q^j W^j \quad (5)$$

P^j は V^j の頂点間に新たに中点を作り出し、 Q^j は生成された中点を補正する再構成フィルタである。(5)式を再帰的に用いる事により、図2に示す3次元ポリゴンモデルの多重解像度近似表現が得られる。

3. Lazy ウェーブレットとk-disk ウェーブレット

3.1. Lazy ウェーブレット

解像度レベル j のスケージング関数の張る空間を V^j 、ウェーブレットの張る空間を W^j とする。 V^{j+1} 内のスケージング関数として図3に示すhat関数を用いる。この時頂点 i に対応する V^j 内のスケージング関数 ϕ_i^j 及び、 W^j 内のLazy ウェーブレット ψ_i^j は次式で表される。

$$\phi_i^j = \frac{1}{2} \phi_{i-1}^{j+1} + \phi_i^{j+1} + \frac{1}{2} \phi_{i+1}^{j+1} \quad (6)$$

$$\psi_i^j(x) = \phi_i^{j+1}(x) \quad (7)$$

Lazy ウェーブレットは単純な解析、再構成フィルタを作るが、オリジナルのモデルの中点を削除するだけの粗野な近似となり実用的ではない。

3.2. k-disk ウェーブレット

V^j 内のスケージング関数に対して W^j 内の Lazy ウェーブレットの直交性を高めることにより最小自乗的な近似を得る事ができる。直交性を高めるために各々のウェーブレットに隣接する幾つかのスケージング関数を Lazy ウェーブレットから減じ、頂点 i に対応するウェーブレットは(8)式で表される。

$$\psi_i^j(x) = \phi_i^{j+1}(x) - \sum_{k \in D(i,k)} s_{i,k}^{j+1} \phi_k^{j+1}(x) \quad (8)$$

係数 $s_{i,k}^{j+1}$ は、 $\psi_i^j(x)$ と V^j 内のスケージング関数との直交条件から定められる。 $D(i,k)$ は頂点 i に対する k-disk を表し、k-disk とはある頂点からエッジを k 回以内たどって到達可能な頂点の集合である。(8)式の形で与えられるウェーブレットは k-disk ウェーブレットと呼ばれる。k-disk の例を図4に示す。

図3にスケージング関数及びそれぞれのウェーブレット、表1にフィルタ形式を示す。

表1: フィルタ形式

	Lazy	k-disk
ウェーブレット	Lazy ウェーブレット	k-disk ウェーブレット
解析フィルタ	$A_{lazy}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ $B_{lazy}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$	$A_{kd}^j = A_{lazy}^j + S^j B_{lazy}^j$ $B_{kd}^j = B_{lazy}^j$
再構成フィルタ	$P_{lazy}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{N}^j \end{bmatrix}$ $Q_{lazy}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$	$P_{kd}^j = P_{lazy}^j$ $Q_{kd}^j = Q_{lazy}^j - P_{lazy}^j S^j$

\mathbf{I} : 単位行列 \mathbf{N}^j : 1/2を各列に2個持つ行列

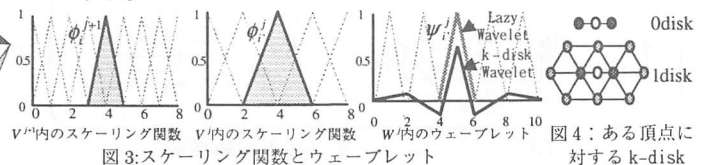


図3: スケージング関数とウェーブレット

図4: ある頂点に対するk-disk

4. disk 幅と近似の幾何学的特性間の関係

disk 幅 k を広げるに連れウェーブレットの直交性が増加する為、最小自乗的な近似に近づく。よって近似精度は良くなり、ある閾値に対するデータ圧縮率は高くなるが、フィルタが密になるため解析・再構成時間は増加する。disk 幅を狭くした場合はその逆である。また disk 幅を広げるに連れ disk 幅に対応する係数行列の成分 s_{ij}^k は小さくなる事からある程度 disk 幅を広げると、disk 幅の変化による近似特性の変動は小さくなると予想される。

5. 評価法及び実験結果

以上の理論に基づき多重解像度近似プログラムを実装しその近似特性を実験的に評価した。本研究の評価対象とする多重解像度近似特性は、データ圧縮率、近似精度、解析・再構成時間である。評価対象は図5に示すモデル(共に面数 2048, 頂点数 $1026, -10 \leq x, y, z \leq 10$)を用いた。disk 幅の変化と Model1 の近似結果を図6に示す。

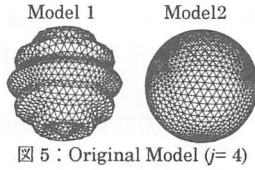


図5: Original Model (j=4)

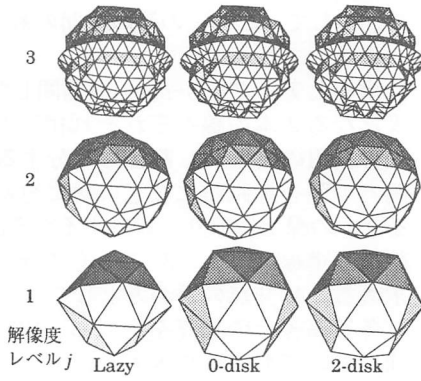


図6: disk 幅の変化による近似結果(Model1)

5.1. 閾値とデータ圧縮率

ウェーブレット係数より作成される詳細信号がある閾値より大きい場合、対応する頂点は再構成時に低解像度のモデルに加え戻されるとして、以下の量をデータ圧縮率 Cr とする。

$$Cr = \{1 - \tilde{m}^j / m^j\} \times 100 (\%) \quad (9)$$

ここで \tilde{m}^j は解像度レベル j の閾値処理を導入した時の近似モデルの頂点数、 m^j は閾値処理を導入していないモデルの頂点数である。実験結果を図7に示す。

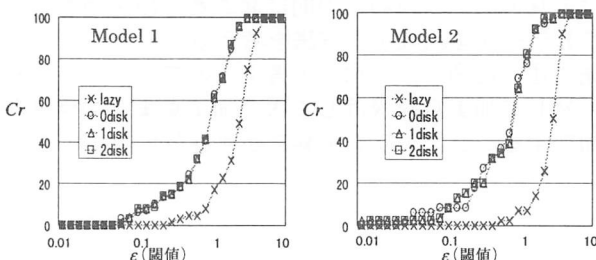


図7: 閾値とデータ圧縮率のdisk幅の変化による影響

5.2. 近似精度

モデルの近似精度の評価基準として以下の2つを用いた。

- 1) 頂点の面法線方向への移動距離の平均
近似モデルの凹凸の変化量を表し、図8に示す符号付き距離 L_i^j の平均値((10)式)を評価量として用いる。

$$E_{MS}^j = \sum_i^m L_i^j / m^j \quad (10)$$

- 2) 頂点・面重心の移動量の平均

近似の際の低解像度モデルにおける頂点・面重心の移動により生じる誤差の平均を表す。頂点・面重心の移動量の平均は(11)式で表される。

$$E_{MA}^j = \sum_i^m |\bar{v}_i^j| / M^d \quad (11)$$

\bar{v}_i^j は頂点・面重心の移動ベクトル(図9中矢印)、 M^d はフルレベルの解像度における頂点・面の総数である。実験結果を図10に示す。2diskを超えるとdisk幅の変化の影響はほとんど見られないことがわかる。

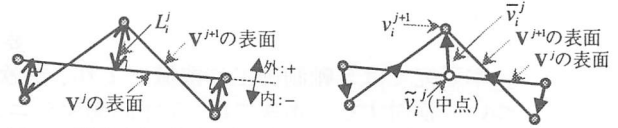


図8: 面法線方向の符号付き距離

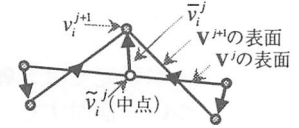


図9: 頂点・面重心の移動ベクトル

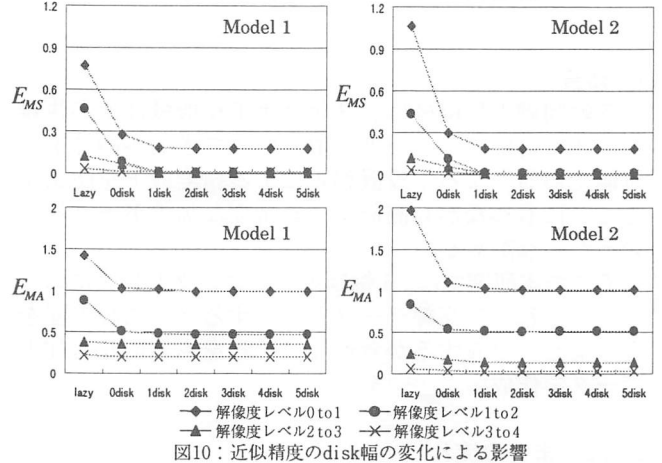


図10: 近似精度のdisk幅の変化による影響

5.3. 解析・再構成時間

k-disk ウェーブレットの解析・再構成フィルタは表1に示す形で与えられ、disk 幅により変化するのは係数行列 S^j の成分数であり、 S^j を含むフィルタは A_{kd}^j と Q_{kd}^j である。再構成フィルタ Q_{kd}^j は(12)式のように表される。

$$Q_{kd}^j = Q_{lazy}^j - P_{lazy}^j S^j = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I' \\ N' \end{bmatrix} S^j = \begin{bmatrix} \tilde{I}' \\ \tilde{N}' \end{bmatrix} \quad (12)$$

\tilde{I}', \tilde{N}' の各行のノンゼロ成分数を n_I^j, n_N^j とすると、それぞれ(13)式で得られる。

$$\begin{aligned} n_I^j(k) &= 6 + \sum_{i=1}^k 6(1+3i) = O(k^2) \\ n_N^j(k) &= 11 + \sum_{i=1}^k 6(2+3i) = O(k^2) \end{aligned} \quad (13)$$

再構成((5)式第二項)の計算量 T は次式で評価可能である。

$$T = m^j \times n_I^j + (m^{j+1} - m^j) \times n_N^j = O(k^2) \quad (14)$$

解析フィルタ A_{kd}^j についても同様である。よって解析・再構成時間は $O(k^2)$ で増加するため、解析・再構成時間を短縮するには disk 幅をできる限り狭く取る方が望ましい。

6. 終わりに

本報では k-disk ウェーブレットの disk 幅の変化と、ポリゴンモデルの多重解像度近似特性を理論的・実験的に評価し、以下の結論を得た。

- 1) Lazy ウェーブレットよりも k-disk ウェーブレットはデータ圧縮率・近似精度の面で有効である。
- 2) disk 幅を3以上広げてもデータ圧縮率・近似精度があまり変化せず解析・再構成時間が増加するのみであるので2~3disk程度のdisk幅が多重解像度近似に最適である。

[参考文献]

- 1) M.Lounsbery: Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type, PhD thesis, University of Washington(1994)
- 2) E. Stollnitz et.al: Wavelet for Computer Graphics: Theory and Applications, Morgan Kaufmann Publishers, Inc.(1996)