

組立モデルにおける自由度拘束のリー環による拘束還元法

北海道大学大学院工学研究科 ○徳永仁史 田中文基 岸浪建史
豊田工機(株) 板倉健一郎

要旨

組立品における部品間の相対的な自由度の解析のために、自由度に対する拘束(自由度拘束)の分類とその拘束還元について幾つかの方法が提案されてきた。しかし、数学的根拠が不明確であり、一般性に欠けていた。また、自由度拘束の形態(二つの部品間に複数の拘束が存在する形態、ある部品を介して二つの部品が拘束される形態)の考慮が不十分である。本報では、リー環に基づいて自由度拘束を分類し、自由度拘束の形態を考慮した一般的な拘束還元法を提案する。

1. はじめに

組立品における部品間の相対的な自由度の解析のために、自由度に対する拘束(自由度拘束)の分類とその拘束還元(複数の拘束から本質的な一つの拘束を導出する手続き, constraint reduction)について幾つかの方法が提案されてきた[1]。しかし、数学的根拠が不明確であり、一般性に欠けているため、拘束還元の手続きにおいて、複雑な計算が必要であった。また、自由度拘束の形態には、図1(a)に示すように剛体間(A₁, A₂)に複数の拘束(C_A, C_B)が存在する形態(並列拘束)と、図1(b)に示すようにある剛体(A₂)を介して剛体(A₁, A₃)が拘束される形態(直列拘束)が存在するが、それらの考慮が不十分である。そこで、本報では、リー環[2]に基づいて自由度拘束を分類し、図1(c)に示すように、リー環の基底間の演算による、自由度拘束の形態を考慮した一般的な拘束還元法を提案する。

2. 自由度拘束

剛体Aの位置と姿勢は、作業空間Wの座標系F_Wに対する剛体の座標系F_Aへの変位に相当する同次変換行列により表現することができる。そのようなすべての行列の集合は積に関して群SE(3) (Special Euclidean group)を成す。SE(3)は、次式で記述できる。

$$SE(3) = \{Trans(x, y, z)R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) \mid x, y, z, \phi, \theta, \psi \in R\} \quad (1)$$

ここで、Trans(x, y, z)は並進変換行列、R_x(φ), R_y(θ), R_z(ψ)は各軸回りの回転変換行列を示している。

本研究では、自由度拘束を、拘束により許容される変位の集合により表現し、リー環(Lie ring)に基づいてSE(3)の部分群として分類することとする。

3. リー群とリー環

ある群Gに対して、行列の指数関数exp(tA)を考える。次式を満たす行列Aの集合を群Gのリー環と呼び、群Gをリー群と呼ぶ

$$\exp(tA) \in G \quad (2)$$

次式はリー環の積に相当し、交換子積と呼ばれる。

$$[A, B] = AB - BA \quad (3)$$

SE(3)をGとして考えると、リー環の任意の元Aは次式で書ける。

$$A = \sum_{i=1}^6 \alpha_i L_i \quad (4)$$

ここで、α_iは実数、L₁, ..., L₆はリー環の基底であり、式(5)で示される。

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

4. 自由度拘束の分類

リー環の部分集合が部分環をなすことは、部分集合の元が交換子積に関して閉じていることにより確認できる(環を構成する残りの条件は自明)。この際、部分集合の任意の元は、式(4)に示すように、リー環の基底のスカラ倍の和により表現されるため、基底間の交換子積を確認すればよい。表1は、L₁, ..., L₆の組合せに対する交換子積を示している。リー環の部分環が存在する時、それに対応するリー群の部分群が存在することから、それにより自由度拘束を分類する。例えば、基底L₁とL₄によ

表1 L₁, ..., L₆の交換子積[A, B]

A \ B	L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	L ₅	L ₆
L ₁	0	0	0	0	-L ₃	-L ₂
L ₂	0	0	0	L ₃	0	-L ₁
L ₃	0	0	0	L ₂	L ₁	0
L ₄	0	-L ₃	-L ₂	0	L ₆	-L ₅
L ₅	L ₃	0	-L ₁	-L ₆	0	L ₄
L ₆	L ₂	L ₁	0	L ₅	-L ₄	0

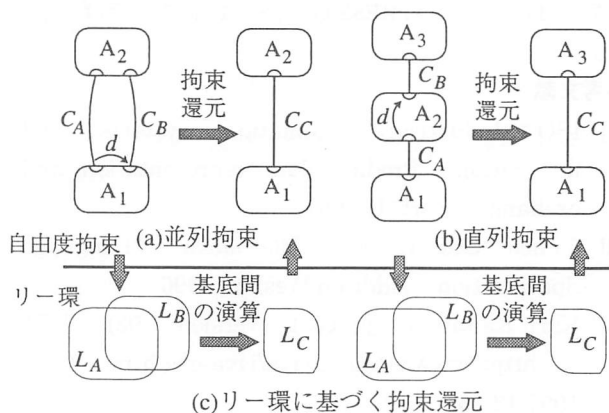


図1 自由度拘束の形態と拘束還元

表2 自由度拘束の分類

自由度	表記	部分群の元	リー環の基底	低次対偶
1	T_v	$Trans(x,0,0)$	L_1	prismatic revolute helical
	R_u	$R_x(\phi)$	L_4	
	$H_{u,p}$	$Trans(x,0,0)R_x(px)$	L_1+pL_4 (p : 定数)	
2	T_p	$Trans(0,y,z)$	L_2, L_3	cylindrical
	C_u	$Trans(x,0,0)R_x(\phi)$	L_1, L_4	
3	T	$Trans(x,y,z)$	L_1, L_2, L_3	planar spherical
	G_p	$Trans(0,y,z)R_x(\phi)$	L_2, L_3, L_4	
	S_o	$R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$	L_4, L_5, L_6	
	$Y_{u,p}$	$Trans(x,y,z)R_x(px)$	L_1+pL_4, L_2, L_3	
4	X_v	$Trans(x,y,z)R_x(\phi)$	L_1, L_2, L_3, L_4	

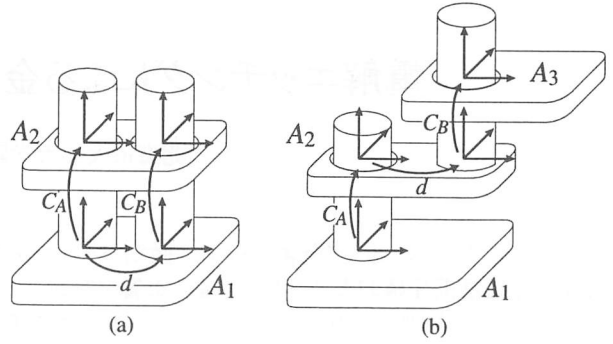


図2 円筒面接触の並列及び直列拘束

を求める手続きとして表現することができる。

$$C_C = C_A \cdot C_B' = M \cdot (C_A \cap C_B') \cdot N \quad (10)$$

ここでMとNは、それぞれ、 C_A と C_B' の基底の内、 $C_A \cap C_B'$ の基底以外の基底により構成される自由度拘束である。

例えば、図2(a)に示すように並列な二つの円筒面接触 C_A と C_B が存在する場合、それらの拘束に相当するリー環の元は、表2により $xL_1 + \phi L_4, x'L_1 + \phi' L_4$ と記述でき、 C_C に相当するリー環の元は次式を満たす。

$$xL_1 + \phi L_4 = d(x'L_1 + \phi' L_4)d^{-1} \quad (11)$$

二つの円筒面が平行な時、 $d = Trans(a,b,c)R_x(\alpha)$ (但し、 $b \neq 0$ or $c \neq 0$)と記述でき、式(11)に d を代入してまとめると次式が得られる。

$$xL_1 + \phi L_4 = x'L_1 + \phi'(cL_2 - bL_3 + L_4) \quad (12)$$

次の解が得られる。

$$x = x', \phi = \phi' = 0 \quad (13)$$

$$\therefore C_C = \{\exp(xL_1) | x \in R\} = \{Trans(x,0,0) | x \in R\} \text{ (拘束 } T_v) \quad (14)$$

また、図2(b)に示すように直列な二つの円筒面接触が存在し円筒面が平行な場合、 C_A と C_B' に相当するリー環の元は、上の並列な二つの円筒面接触の場合と同様に、 $xL_1 + \phi L_4, d(x'L_1 + \phi' L_4)d^{-1} = x'L_1 + \phi'(cL_2 - bL_3 + L_4)$ と記述でき、 $C_A \cap C_B'$ の基底が L_1 であることから、式(10)における拘束MとNを構成する基底は、それぞれ、 $L_4, cL_2 - bL_3 + L_4$ となる。

$$\begin{aligned} \therefore C_C &= \{\exp(\phi L_4) | \phi \in R\} \cdot \{\exp(xL_1) | x \in R\} \\ &= \{\exp(\phi'(cL_2 - bL_3 + L_4)) | \phi' \in R\} \\ &= \{\exp(xL_1) \exp(\phi L_4) | x, \phi \in R\} \cdot \{d \exp(\phi' L_4) d^{-1} | \phi' \in R\} \\ &= \{Trans(x,0,0)R_x(\phi) | x, \phi \in R\} \cdot \{dR_x(\phi')d^{-1} | \phi' \in R\} \text{ (拘束 } C_u \cdot R_u) \end{aligned} \quad (15)$$

6. おわりに

本研究では、以下のことを行った。

- (1) リー環を用いると、SE(3)には10個の部分群が存在することが明らかになり、自由度拘束をその部分群により分類した。
- (2) リー環に基づき一般的な拘束還元法を明らかにした。

参考文献

[1] 例えば、F. Thomas 他: A Group-Theoretic Approach to the Computation of Symbolic Part Relations, IEEE J. Robotics and Automation, 4, 6, (1988) 622
 [2] 例えば、梁成吉: キーポイント行列と変換群, 岩波書店

り決定されるリー環の部分集合を考える。表1より、 L_1 と L_4 は交換子積について閉じていることから、この部分集合は部分環を成す。この部分環に対応する部分群は次式で書ける。

$$\begin{aligned} &\{\exp(tA) | A = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_4, t, \alpha_1, \alpha_2 \in R\} \\ &= \{\exp(xL_1 + \phi L_4) | x, \phi \in R\} \quad (6) \end{aligned}$$

但し、 $x = t\alpha_1, \phi = t\alpha_2$ とする。この部分群により表現される自由度拘束を C_u とする。同様の方法で、表2に示す10個の自由度拘束が導出された。ただし、x軸並進とy軸並進のように共役な部分群[1]は、一つにまとめた。

5. 拘束還元

拘束還元とは、図1(a)(b)に示すように、複数の拘束から本質的な一つの拘束を導出する手続きである。本研究ではこの操作を、図1(c)に示すようにリー環において行う。図1(a)(b)に示すように、剛体に対して二つの自由度拘束 C_A と C_B が与えられる場合、 C_A から見た C_B は、それらの定義される座標系間の変位を d とすると $C_B' = \{dgd^{-1} | g \in C_B\}$ で記述できる[1]。

並列拘束の拘束還元とは、次の拘束 C_C を求める手続きとして表現することができる。

$$C_C = C_A \cap C_B' \quad (7)$$

C_A 及び C_B' を、それぞれ、表2に示すリー環の基底 L_i^A, L_i^B を用いて表現すると、式(7)は次式となる。

$$\begin{aligned} C_C &= \left\{ \exp(tA) \middle| A = \sum_{i=1}^{N_A} \alpha_i L_i^A, t, \alpha_i \in R \right\} \cap \left\{ d \exp(tB) d^{-1} \middle| B = \sum_{i=1}^{N_B} \beta_i L_i^B, t, \beta_i \in R \right\} \\ &= \left\{ \exp(tA) \middle| A = \sum_{i=1}^{N_A} \alpha_i L_i^A = \sum_{i=1}^{N_B} \beta_i d L_i^B d^{-1}, t, \alpha_i, \beta_i \in R \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

ここで、 α_i, β_i は実数、 N_A, N_B は基底の数である。すなわち、式(9)を満たす α_i, β_i を求めることにより、 C_C が求められる。

$$\sum_{i=1}^{N_A} \alpha_i L_i^A = \sum_{i=1}^{N_B} \beta_i d L_i^B d^{-1} \quad (9)$$

一方、直列拘束の拘束還元は、自由度拘束の合成を $C_i \cdot C_j = \{f \cdot g | f \in C_i, g \in C_j\}$ として定義すると、次の C_C