

# 頂点削除と等角写像に基づいた 任意位相メッシュから多重解像度解析可能なメッシュへの変換

北海道大学大学院工学研究科

○三浦夕季 金井理 岸浪建史

## 要旨

3次元メッシュに対するウェーブレット変換に基づいた多重解像度解析は、データ圧縮やLOD制御、透かしデータの埋め込みを容易に可能にするが、4対1細分割連結性の位相をもつメッシュにしか適用できないという欠点がある。この欠点を克服するために、Leeらにより提案されている、頂点削除と等角写像に基づいた任意位相メッシュに対するリメッシュ化手法に基づき、4対1細分割連結性メッシュを生成するアルゴリズムを実装するとともに、リメッシュ化された結果に対し、ウェーブレット変換に基づく多重解像度解析が可能となることを検証した。

### 1. はじめに

コンピューター技術が発達するにつれ、形状処理が単純化でき、高速な描画が可能な形状モデルである3次元メッシュの利用機会が増えている。しかし、この3次元メッシュは、膨大なデータ量のために保存や編集という作業が困難である。この問題に対し、ウェーブレット変換に基づいた多重解像度解析はデータ圧縮やLOD制御[1]、透かしデータの埋め込み[2]などを容易に可能にする。しかし、これは図1のような4対1細分割連結性の位相をもつメッシュにしか適用できないという欠点があるため、任意位相メッシュから4対1細分割連結性の位相をもつメッシュに変換するための技術が求められている。

そこで本研究では図2に示すように、Leeらにより提案されている頂点削除と等角写像に基づいた任意位相メッシュに対するリメッシュ化手法[3]に基づき、4対1細分割連結性メッシュを生成するアルゴリズムを実装するとともに、その結果に対してウェーブレット変換に基づく多重解像度解析が可能であることを示す。

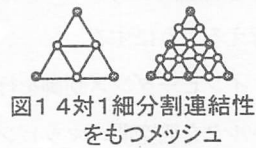


図1 4対1細分割連結性をもつメッシュ

### 2. 頂点削除と等角写像に基づくリメッシュ化手法

頂点削除と等角写像に基づくリメッシュ化の流れを図3に示す。まず、初期メッシュから4対1分割を行うことのできる基礎定義域を生成し、基礎定義域上で4対1分割した分割

点を、基礎定義域生成の際に別途計算された写像によってメッシュ上の点に変換し、リメッシュ点を得る。

### 2.1 基礎定義域の生成

基礎定義域の生成は以下の2つの処理から構成される。

#### (1)頂点の削除優先度の計算と削除頂点の決定

$i$ 番目の各頂点  $p_i$  に対し、図4の領域における面積  $a(i)$  と曲率  $\kappa(i)$  を計算する。これから、その頂点の削除優先度  $w(\lambda, i)$  を式(1)により求める。

$$w(\lambda, i) = \lambda \frac{a(i)}{\max_{p_i \in P^l} a(i)} + (1 - \lambda) \frac{\kappa(i)}{\max_{p_i \in P^l} \kappa(i)} \quad (1)$$

ここで、 $P^l$  はレベル  $l$  の頂点集合である。  $0 \leq \lambda \leq 1$  である。頂点削除のルールとして、この削除優先度の高い頂点から順に削除し、それに隣接した頂点(図4の黒い頂点)を削除できないものとして、それ以上頂点が削除できなくなるまでこれを繰り返す。

#### (2)Delaunay 三角形分割による再三角形分割

そのレベルでの削除すべき頂点が決定すると、削除する頂点周囲の領域(図4の領域)を等角写像を用いて平面に写像する。削除する頂点  $p_i$  の隣接頂点が  $p_{j_1}, \dots, p_{j_k}$  のとき、これらは式(2)の等角写像を用いて、図5のように平面に写像できる。

$$\mu_i(p_i) = 0, \quad \mu_i(p_{j_k}) = r_k^a \exp(i\theta_k a) \quad (2)$$

ここで、 $\mu(p)$  は平面上での座標値、  $r_k = \|p_i - p_{j_k}\|$ 、  $a = 2\pi/\theta_k$ 、  $\theta_k = \sum_{j=1}^k \angle(p_{j-1}, p_i, p_{j_1})$  である。平面に写像した、削除した頂点の隣接頂点群を境界とする領域に対して境界制約付きのDelaunay 三角形分割を行う[4]。これを繰り返すことによって基礎定義域を得る。

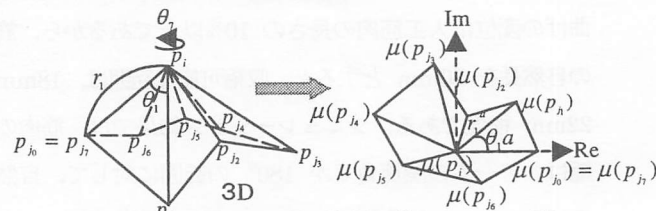


図5 等角写像

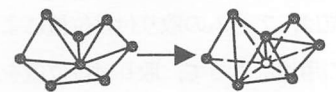


図6 Delaunay三角形分割

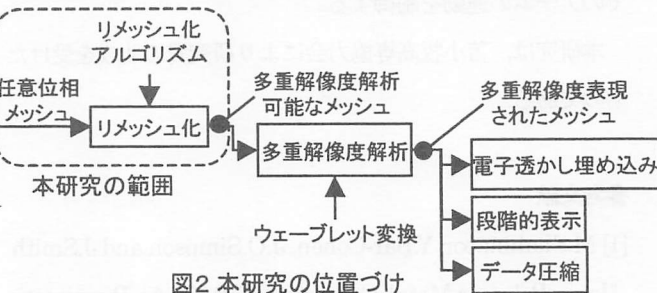


図2 本研究の位置づけ

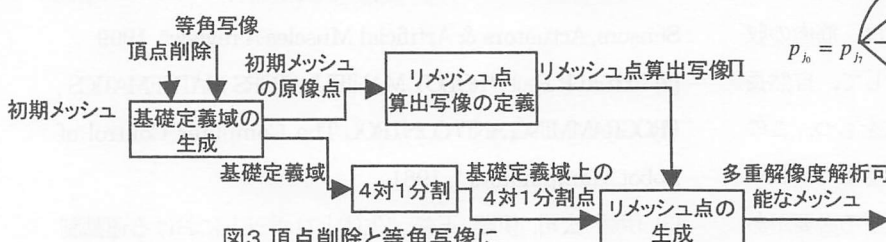


図3 頂点削除と等角写像に基づくリメッシュ化の流れ

## 2.2 リメッシュ点算出写像の定義

リメッシュ点を算出するためには、基礎定義域上の4分割点からリメッシュ点への写像が必要となる。これは図7のように、頂点を削除していく際につくられる初期メッシュ上の点から基礎定義域上の点への写像の逆写像として得られる。基本的には、レベル*L*の初期メッシュとレベル*l*のメッシュ間の写像 $\Pi$ を考え、これを繰り返し計算することで最終的に $\Pi^0 = \Pi$ を得る。

今 $\Pi^l$ が与えられ $\Pi^{l-1}$ を計算したいと仮定する。全ての頂点は次の3つのケースに分類され、それにより $\Pi^{l-1}$ の計算も異なる。

ケース1: 頂点はレベル*l*において削除されずレベル*l-1*で残っている(図8)。このとき、写像は式(3)となる。

$$\Pi^{l-1}(p_i) = \Pi^l(p_i) = p_i \quad (3)$$

ケース2: 頂点はレベル*l*からレベル*l-1*になったとき削除される。再三角形分割の後、削除された頂点はある三角形 $p_j, p_k, p_m$ 内に位置し、その面の頂点に関する重心座標 $(\alpha, \beta, \gamma)$ をもつ(図9)。このとき写像は式(4)となる。

$$\Pi^{l-1}(p_i) = \alpha p_j + \beta p_k + \gamma p_m \quad (4)$$

ケース3: 頂点はレベル*l*の時点ですでに削除されており、ある三角形に対して $\Pi^l(p_i) = \alpha p_j + \beta p_k + \gamma p_m$ であるとする。もしその三角形が次のレベルで残っているならそのままよい。そうでなければ、その三角形の1つの頂点が削除されることになり、再三角形分割の後 $\Pi^l(p_i)$ は新しい三角形 $p_j, p_k, p_m$ 内に位置する(図10)。写像は式(5)となる。

$$\Pi^{l-1}(p_i) = \alpha p_j + \beta p_k + \gamma p_m \quad (5)$$

このようにして初期メッシュの頂点はすべて基礎定義域上に写像される。

## 2.3 リメッシュ点の生成

上で求めた $\Pi$ の逆写像 $\Pi^{-1}$ を用いてリメッシュ点を得る。4分割点*q*の基礎定義域上での重心座標を用いて $\Pi^{-1}(q)$ を計算する。特に $\Pi^{-1}(q)$ を含む初期メッシュの三角形を求める必要がある。*q*を含んだ三角形 $p_i, p_j, p_k$ を基礎定義域上でみつけると、*q*を式(6)のように書くことができる。

$$q = \alpha \Pi(p_i) + \beta \Pi(p_j) + \gamma \Pi(p_k) \quad (6)$$

従って*q*に対応するリメッシュ点 $\Pi^{-1}(q)$ は式(7)で与えられる。

$$\Pi^{-1}(q) = \alpha p_i + \beta p_j + \gamma p_k \quad (7)$$

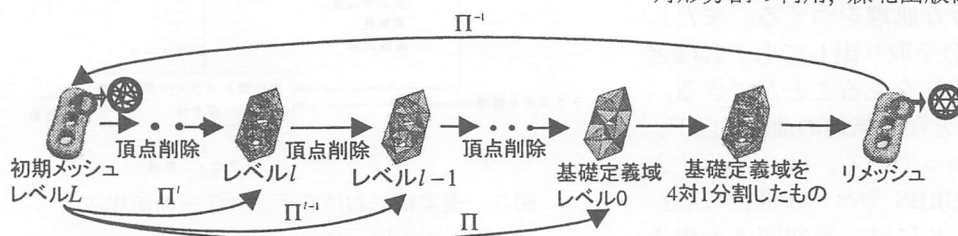


図7 リメッシュ点算出関数の生成

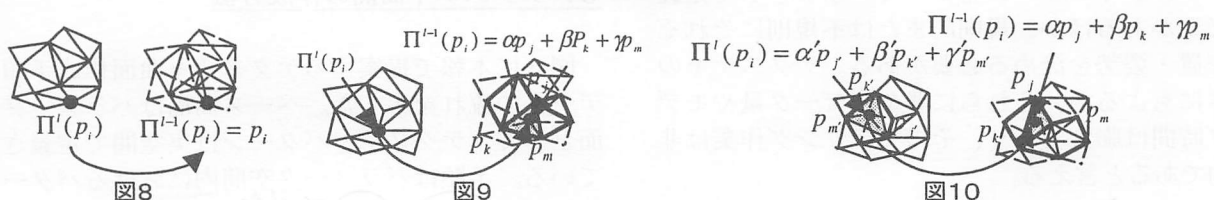


図8

図9

図10

これによってリメッシュ点の座標が求まり、4対1細分割連結性をもつメッシュが得られる。

## 3. 実行結果

実装結果を図11に示す。(a)の任意位相をもつ初期メッシュに対し、基礎定義域(b)を生成し、これを4対1細分割連結性メッシュにリメッシュ化すると(c),(d),(e)となる。(f)はk-diskウェーブレット変換に基づいて(e)の多重解像度解析を行い、解像度を1レベル下げた結果である。

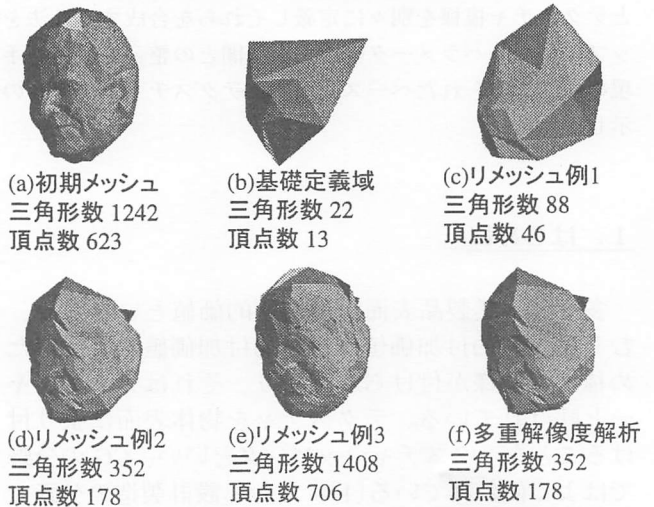


図11 実行結果

## 4. 終わりに

Leeらにより提案されている、頂点削除と等角写像に基づいた任意位相メッシュに対するリメッシュ化手法に基づき、4対1細分割連結性メッシュを生成するアルゴリズムを実装した。またその結果、任意位相をもつ3次元メッシュに対するウェーブレット変換に基づく多重解像度解析が可能となることを確認した。

## 参考文献

- [1]Stollnitz E.J,DeRose T, Salesin D.H : Wavelets for Computer Graphics:Theory and Applications, Morgan Kaufmann, 1996
- [2]伊達宏昭, 1998年度精密工学会秋季大会 学術講演会講演論文集(1998), pp.92
- [3]Aaron W.F.Lee et.al : Multiresolution Adaptive Parameterization of Surfaces, Proc. of SIGGRAPH 98 (1998), pp.95-104
- [4]谷口健男, FEMのための要素自動分割 デローニー三角形分割の利用, 森北出版株式会社 1992, pp.9-122