

機構解析における最小の機構モデルの導出に関する研究
 —リー代数に基づく組立モデルにおける拘束還元とその計算機実装—

北海道大学大学院工学研究科

○村井正俊, 田中文基, 岸浪建史

要旨

機構解析においては、部品及び拘束の増加に伴って必要となる計算機の記憶容量、計算時間が增大するため、注目する部品の運動またはその拘束について等価な最小の機構モデルを導出する必要がある。本研究では、リー代数の概念を導入し、拘束還元操作をリー代数における操作として計算機で実装し、最小の機構モデルを導出する。

1.はじめに

組立品における部品の相対位置及び運動の解析は、部品の相対位置に対する拘束の表現とその拘束還元に着目される。拘束還元は複数の拘束から等価な働きをする本質的な一つの拘束を導出する手続きである。本研究では、接触拘束が剛体変換行列全体の集合 $[SE(3)]$ の部分群として表現できることに着目し、リー群、リー代数の概念を導入することで、接触拘束の拘束還元手続きを、計算機により実装可能な形式で記述し、計算機で実装する。計算機への実装には、数式処理ソフト Mathematica を使用した。

2.拘束還元とその必要性

機構モデルの接続構造を解析し、それらを構成する部品間の相対的な自由度または拘束を明示的に表現することが可能であるならば、製品の設計・製造に関する有用な情報を提供することが可能であり、設計の効率を改善することができる。このような要求に対して、拘束還元は重要である。拘束還元とは、図1のように複数の拘束から等価な働きをする本質的な一つの拘束を導出する手続きである。拘束還元により、基本設計において組立品の接続構造を解析し、より単純で等価な機構を改良案として提示することが可能であるならば、機構を表現する拘束の数を低減し、機構解析に要する時間、記憶容量を低減させることを可能とする。

拘束の形態としては、図1(a)のような、剛体 A_1, A_2 間に複数の拘束が定義されている形態(並列拘束)と、図1(b)のような、剛体 A_2 を介して剛体 A_1, A_3 間が拘束されている形態(直列拘束)がある。

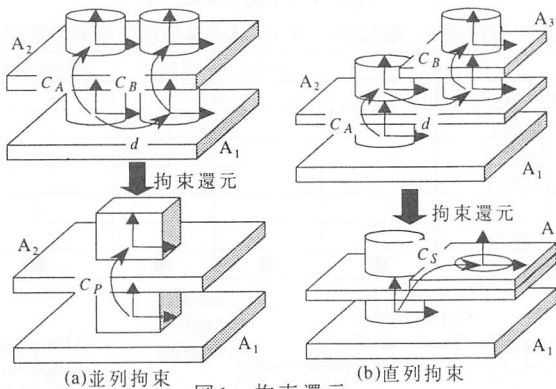


図1 拘束還元

3.従来の拘束還元の問題点

従来の拘束還元手法を図2に示す。並列拘束に対する拘束還元は、拘束 C_A, C_B 、及び、それらの座標系間の座標変換行列 d より式(1)を満たす C_P を求める手続きである。

$$C_P = C_A \cap dC_B d^{-1} = \{c \mid c = a = b, a \in C_A, b \in dC_B d^{-1}\} \quad (1)$$

拘束は一般に変数を含んだ行列形式で表現されるため、従来の手法では以下のような問題点から計算機による実装は困難であると考えられる。

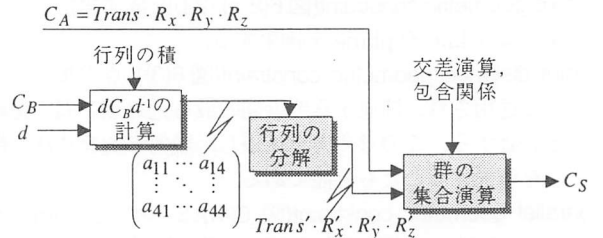


図2 従来の拘束還元手法

表1 部分群とリー部分代数

自由度	表記	$SE(3)$ の部分群	$SE(3)$ のリー部分代数
1	T_x	$Trans(x, 0, 0)$	$a_{1/1}$
	R_y	$R_x(\phi)$	$a_{4/4}$
	H_{wp}	$Trans(x, 0, 0) R_x(\phi x)$	$a_{1/(1+p/4)}(p:constant)$
2	T_p	$Trans(0, y, z)$	$a_{2/2} + a_{3/3}$
	C_n	$Trans(x, 0, 0) R_x(\phi)$	$a_{1/1} + a_{4/4}$
	3	T	$Trans(x, y, z)$
G_p		$Trans(0, y, z) R_x(\phi)$	$a_{2/2} + a_{3/3} + a_{4/4}$
S_o		$R_x(\phi) R_y(\theta) R_z(\psi)$	$a_{4/4} + a_{5/5} + a_{6/6}$
Y_{wp}		$Trans(x, y, z) R_x(\phi x)$	$a_{1/(1+p/4)} + a_{2/2} + a_{3/3}$
4	X_p	$Trans(x, y, z) R_x(\phi)$	$a_{1/1} + a_{2/2} + a_{3/3} + a_{4/4}$

- 式(2)のように、行列を並進変換行列や回転変換行列に分解することが困難である。

$$dC_B d^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \dots & a_{44} \end{pmatrix} = Trans(x, y, z) R_x(\phi) R_y(\theta) R_z(\psi) \quad (2)$$

- 式(3)を満たす、交差演算を行うことが困難である。

$$C_A \cap dC_B d^{-1} = \{c \mid c = a = b, a \in C_A, b \in dC_B d^{-1}\} \quad (3)$$

本研究では、リー代数を用いることにより、これらの問題点を解決する。

4.リー代数に基づく拘束還元

4.1: 剛体変換とリー代数

物体間の相対的な位置や姿勢は、物体に固定された座標系間の変位(一方の座標系に対する他方の座標系の位置姿勢)を表現する同次変換行列(剛体変換)により記述できる。そのような全ての行列の集合は積に関して群 $SE(3)$ を成す。

$$SE(3) = \{Trans(x, y, z) R_x(\phi) R_y(\theta) R_z(\psi) \mid x, y, z, \phi, \theta, \psi \in R\} \quad (4)$$

ここで、 $Trans(x, y, z)$ は並進変換行列、 $R_x(\phi), R_y(\theta), R_z(\psi)$ は各軸周りの回転変換行列を示している。表1に $SE(3)$ の部分群とそのリー部分代数を示す。

リー群 G に対するリー代数 \mathcal{G} は行列の指数写像を用いることにより式(5)で表現できる。

$$\mathcal{G} = \{g \mid \exp(tg) \in G, t \in R\} \quad (5)$$

群 $SE(3)$ に対するリー代数 $SE(3)$ の任意の元 r は式(6)で表現できる。

$$r = \sum_{i=1}^6 \alpha_i / i \quad (6)$$

ここで、 $\alpha_i \in R$, $\mathcal{I}_i (i=1, \dots, 6)$ は $\mathcal{SE}(3)$ の標準的な基底であり式(7)で示される。

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{I}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{I}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{I}_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

4.2: リー代数に基づく拘束還元

リー代数に基づく並列拘束の拘束還元手順を図3に示す。

STEP 1: リー部分代数への変換。

拘束 C_A のパラメータが $\alpha_1, \dots, \alpha_j$, 拘束 C_B のパラメータが β_1, \dots, β_k である時、それぞれのリー部分代数 \mathcal{H}_{CA} , \mathcal{H}_{CB} は表1より式(8),(9)となる。ここで、添字 j, k は拘束の自由度により決定される。

$$\mathcal{H}_{CA} = \sum_{i=1}^6 f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_j) \mathcal{I}_i \quad (8)$$

$$\mathcal{H}_{CB} = \sum_{i=1}^6 g_i(\beta_1, \dots, \beta_k) \mathcal{I}_i \quad (9)$$

行列の指数写像の性質より、 $d\mathcal{H}_{CB}d^{-1}$ に相当するリー部分代数は $d\mathcal{H}_{CB}d^{-1}$ となる。 $d\mathcal{H}_{CB}d^{-1}$ に式(9)及び座標変換行列 d を代入しまとめると式(10)となる。

$$d\mathcal{H}_{CB}d^{-1} = \sum_{i=1}^6 g'_i(\beta_1, \dots, \beta_k) \mathcal{I}_i \quad (10)$$

STEP 2: 交差の計算。

リー部分群の交差集合はリー部分代数の交差集合に対応することより、リー代数において並列拘束の拘束還元手続きは、式(11)により求まる。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{CP} &= \mathcal{H}_{CA} \cap d\mathcal{H}_{CB}d^{-1} \\ &= \left\{ c \mid c = \sum_{i=1}^6 f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_j) \mathcal{I}_i = \sum_{i=1}^6 g'_i(\beta_1, \dots, \beta_k) \mathcal{I}_i \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

それぞれの基底 \mathcal{I}_i の係数をまとめると式(12)を得る。

$$f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_j) = g'_i(\beta_1, \dots, \beta_k) \quad i=1, \dots, 6 \quad (12)$$

式(12)を特異値分解を用いて解くことにより、式(13)が得られる。ここで、添字 m は特異値分解により式(12)より求まる独立なパラメータの数である。

$$f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_j) = g'_i(\beta_1, \dots, \beta_k) = h_i(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \quad (13)$$

式(13)より、 \mathcal{H}_{CP} は式(14)で与えられる。

$$\mathcal{H}_{CP} = \sum_{i=1}^6 h_i(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \mathcal{I}_i \quad (14)$$

STEP 3: リー群への変換。

STEP 2 で求めた \mathcal{H}_{CP} より、拘束 C_P は行列の指数写像を用いることにより、式(15)で与えられる。

$$C_P = \{ \exp(\mathcal{H}_{CP}) \mid \mathcal{H}_{CP} \in \mathcal{H}_{CP} \} \quad (15)$$

これより、拘束還元の結果として C_P を得る。

直列拘束に対する拘束還元は、拘束 C_A, C_B , 及び、それらの座標系間の座標変換行列 d より式(16)を満たす C_P を求める手続きである。

$$C_S = C_A \cdot C_B = \{ a \cdot b \mid a \in C_A, b \in C_B \} \quad (16)$$

式(16)は式(17)のように変換できる。

$$C_S = C_A \cdot C_B = N \cdot (C_A \cap C_B) \cdot M \quad (17)$$

従って、直列拘束に対する拘束還元手続きも並列拘束の場合と同様の手順で行える。

5. 適用例

図4(a)のように、二つの円筒面接触 C_A, C_B が与えられた場合を考える。

STEP 1: 円筒面接触に相当する拘束は表1の C_u に相当する。従って、リー部分代数 $\mathcal{H}_{CA}, \mathcal{H}_{CB}$ は式(18)となる。

$$\mathcal{H}_{CA} = \alpha_1 \mathcal{I}_1 + \alpha_4 \mathcal{I}_4, \quad \mathcal{H}_{CB} = \beta_1 \mathcal{I}_1 + \beta_4 \mathcal{I}_4 \quad (18)$$

式(10)に、 $d = \text{Trans}(0, 5, 10)R_x(\pi)$ を代入し式(19)を得る。

$$d\mathcal{H}_{CB}d^{-1} = \beta_1 \mathcal{I}_1 + 10\beta_4 \mathcal{I}_2 - 10\beta_4 \mathcal{I}_3 + \beta_4 \mathcal{I}_4 \quad (19)$$

STEP 2: 式(12)を満たす方程式として式(20)を得る。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

式(20)を特異値分解を用いて解くと式(21)を得る。

$$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1, \quad \alpha_4 = \beta_4 = 0 \quad (21)$$

従って、 \mathcal{H}_{CP} は式(22)で表現される。

$$\mathcal{H}_{CP} = \{ \gamma_1 \mathcal{I}_1 \} \quad (22)$$

STEP 3: 行列の指数写像により拘束は式(23)となる。

$$C_P = \{ \exp(\gamma_1 \mathcal{I}_1) \} = \{ \text{Trans}(\gamma_1, 0, 0) \} \quad (23)$$

並列な二つの円筒面接触は、図4(b)のように一つの角柱面接触で表現できる。

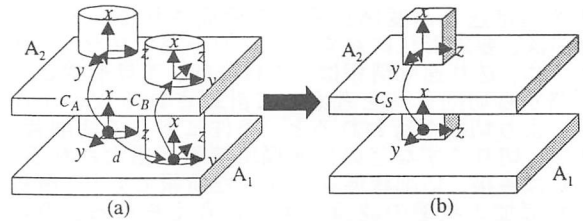


図4 円筒面接触の並列拘束

6. おわりに

本研究では、拘束を表現する部分群をリー代数により表現することで、接触拘束の拘束還元手続きを、計算機により実装可能な形式で記述し、その実現性を確認した。

【参考文献】

- [1] Robin J. Popplestone 他: A Group Theoretic Approach to Assembly Planning, AI Magazine, Spring 1990 pp82-97.
- [2] 徳永仁史他: 組立モデルにおけるリー代数に基づく拘束表現と拘束還元, 精密工学会誌, vol.65, No.12, 1999 pp1729-1734.

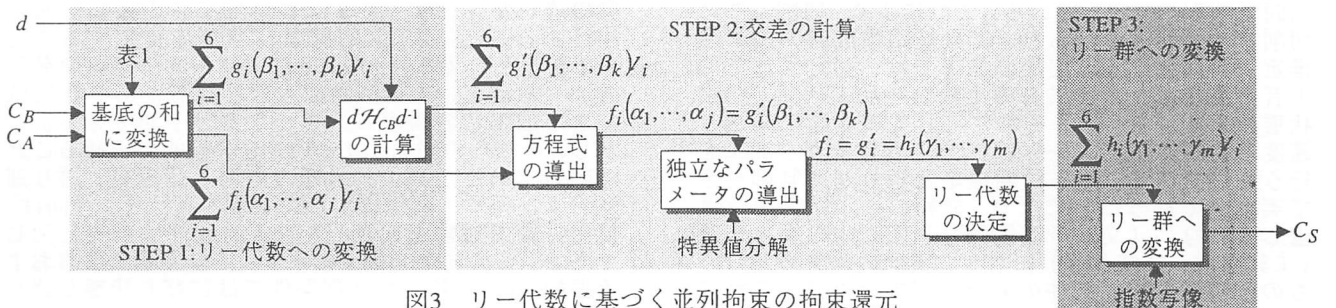


図3 リー代数に基づく並列拘束の拘束還元