

リー代数に基づく接触拘束の組合せによる機構設計法 —接触拘束の組合せによる機構の導出—

北海道大学大学院工学研究科 ○村井正俊, 田中文基, 岸浪建史
産業技術総合研究所 徳永仁史

要旨

要求された自由度を満たし過拘束でない機構を設計するためには、要求された自由度を満たす機構を導出し、その後過拘束評価を行う必要がある。本報では、接触拘束の組合せによる機構設計法において、リー代数に基づく接触拘束の組合せによる機構の導出を行う。

1. はじめに

要求された自由度を満たしかつ過拘束でない機構を設計するには、まず接触拘束の組合せにより要求自由度を満たす機構を全て導出し、これらの機構に対して拘束解析による過拘束評価を行う必要がある(図1)。

機構のシンセシスについては、直列拘束に対してリー代数を用いた方法^[1]が提案されているが、並列拘束を考慮していない。そこで本報では、並列拘束を考慮したリー代数に基づく接触拘束の組合せによる機構設計法を提案する。

2. リー代数に基づく機構のシンセシスについて

運動機能を実現する機械製品の機構構造を導出する手続きは機構のシンセシスと呼ばれる。部品の自由度という観点から機構構造を導出するシンセシス手続きとして、直列拘束を対象としてリー代数に基づく機構のシンセシスが提案されている^[1]。しかし、組立品においては、直列拘束で構成される機構(図2(a))よりも、並列拘束で構成される機構(図2(b))のほうが、剛性が高い機構を構成でき、組立が容易である等の理由から重要である。従って、並列拘束に対するリー代数に基づく機構のシンセシス手続きを提案する必要がある。

3. リー代数に基づく接触拘束及び自由度の表現

隣接部品のフィーチャ座標系間の接触拘束を表現する変換行列の集合 M_i は、剛体変換 $SE(3)$ の部分群であり、行列の指数写像を用いて、式(1)のように剛体変換 $SE(3)$ に対応するリー代数 $se(3)$ の部分代数 A_i と対応させることができる。

$$M_i = \exp(A_i) \quad (1)$$

ここで、 A_i は $se(3)$ の基底 L_1, \dots, L_6 の線形結合で表現される。部分代数を成す(交換子積 $[A, B] = AB - BA$ に関して閉じている)基底の組合せにより表1に示す10個の接触拘束が定義できる。

隣接部品の部品座標系間の自由度 C_i は、フィーチャ座標系間の接触拘束、即ち、表1に示す10個の接触拘束を表現する部分群 M_i の共役部分群として式(2)のように表現できる。

$$C_i = d_i M_i d_i^{-1} = \exp(d_i A_i d_i^{-1}) \quad (2)$$

ここで、 d_i は部品座標系とフィーチャ座標系間の変位(軸の方向や位置)を表現するもので、 $d_i = \text{Trans}(a, b, c) R_x(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma)$ である。共役部分群の概念を用いると、軸の方向や位置は異なるが等価な接触拘束を表現することができる。

4. 並列拘束に対するリー代数に基づく機構のシンセシス

並列拘束に対するリー代数に基づく機構のシンセシスは、隣接部品間の自由度を表現する部分群 F のリー代数 A_F に対して、式(3)を満たす $d_n A_n d_n^{-1}$ の組合せを導出手続きである(図3)。

$$A_F = d_1 A_1 d_1^{-1} \cap \dots \cap d_n A_n d_n^{-1} \quad (3)$$

ただし、本研究では、隣接部品間の自由度を表現する部分群 F (リー代数 A_F) は表1の接触拘束により表現可能な

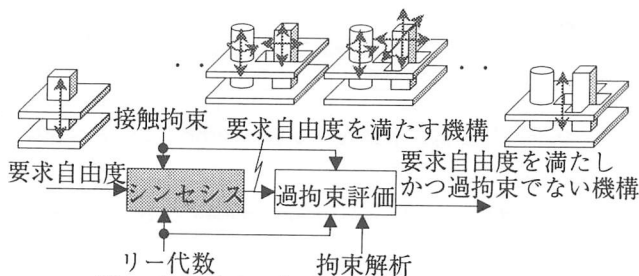


図1 接触拘束の組合せによる機構設計法

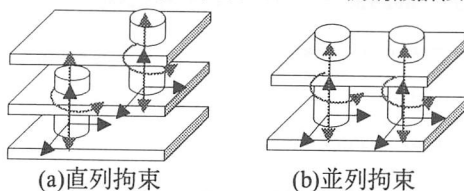


図2 機構の種類

表1 接触拘束分類結果

自由度	表記	対応する部分群 M_i	基底	接触		
1	T_v	$\text{Trans}(x, 0, 0)$	L_1	並進 回転 ねじ		
	R_u	$R_x(\phi)$	L_4			
	H_{wp}	$\text{Trans}(x, 0, 0)R_x(px)$	$L_1 + pL_4$			
2	T_p	$\text{Trans}(0, y, z)$	L_2, L_3	円筒面		
	C_u	$\text{Trans}(x, 0, 0)R_x(\phi)$	L_1, L_4			
	3	T	$\text{Trans}(x, y, z)$		L_1, L_2, L_3	平面 球面
		G_p	$\text{Trans}(0, y, z)R_x(\phi)$		L_2, L_3, L_4	
4	S_o	$R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$	L_4, L_5, L_6	平面 球面		
	Y_{wp}	$\text{Trans}(x, y, z)R_x(px)$	$L_1 + pL_4, L_2, L_3$			
4	X_v	$\text{Trans}(x, y, z)R_x(\phi)$	L_1, L_2, L_3, L_4			

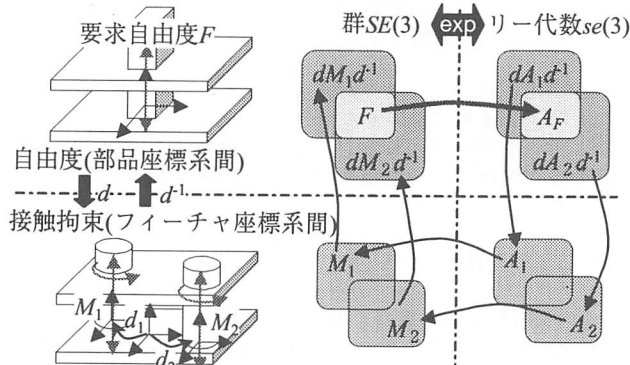


図3 並列拘束に対する機構のシンセシス

ものに限定する。具体的には、図4,5に示すように以下の手順で行う。

A1: 隣接部品間の要求自由度を表現する部分群 F に対して、表1より式(4)に示すような F のリー代数表現 A_F を導出する(図6(a))。

$$A_F = \sum_{j \in N} t_j L_j \quad (4)$$

ここで、 N は集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ の部分集合である。例えば、円筒面接触 C_u の場合 $N=\{1,4\}$ となる。

A2: $A_F \subseteq d_i A_i d_i^{-1}$ を満たす $d_i A_i d_i^{-1}$ を導出する。但し、 $i=1, \dots, n$ であり、 n は並列拘束をなす接触拘束の数である。

A21: $A_F \subseteq A_i$ を満たす A_i を導出する(図 6(b))。このような A_i は、 A_F の基底に対して交換子積に関して閉じている基底を足すことにより、式(5)のように表現できる。

$$A_i = \sum_{j \in N_A} t_j L_j \quad (5)$$

ここで、 N_A は $N \subseteq N_A$ となる集合である。

A22: $d = \text{Trans}(a, b, c) R_x(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma)$ とし式(5)の結果を用いて $d_i A_i d_i^{-1}$ を式(6)に示すように計算する。

$$d_i A_i d_i^{-1} = \sum_{j \in N_A} \left(t_j \sum_{k \in N_B} f_k(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) L_k \right) \quad (6)$$

ここで、 N_B は集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ の部分集合である。

A23: 式(4)(6)より $A_F \subseteq d_i A_i d_i^{-1}$ を満たすべき基底の条件は式(7)となる。

$$L_j = \sum_{k \in N_B} f_k(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) L_k \quad (7)$$

式(7)より式(8)を得る。

$$\begin{aligned} f_k(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) &= 1 \quad (k = j) \\ f_k(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) &= 0 \quad (k \neq j) \end{aligned} \quad (8)$$

A24: 式(8)を解くことにより、A21 で導出した A_i に対して $A_F \subseteq d_i A_i d_i^{-1}$ を満たす変換行列 d における $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ が求まる。

A25: A21, A24 の結果より、 $d_i A_i d_i^{-1}$ を導出する(図 6(c))。

A3: $d_i A_i d_i^{-1}$ の組合せを導出する。

A4: $d_i A_i d_i^{-1}$ を自由度を表現する変換行列 $d_i M_i d_i^{-1}$ へ変換する。これより要求自由度を表現する部分群 F を満たす接触拘束 $M_i (i=1, \dots, n)$ とその配置 d の並列拘束が導出された。

5. 具体例

本手法を図 7(a) に示す機構(要求自由度 $F=T_1$) に適用した結果の 1 例を示す。

A1: F のリー代数表現 A_F は式(9)となる。

$$A_F = t_1 L_1 \quad (9)$$

A2: $d_i A_i d_i^{-1}$ を求める。

A21: A_i の 1 つとしては式(10)となる。

$$A_i = t'_1 L_1 + t'_4 L_4 \quad (10)$$

A22: $d_i A_i d_i^{-1}$ は式(11)となる。

$$\begin{aligned} d_i A_i d_i^{-1} &= t'_1 (f_1 L_1 + f_2 L_2 + f_3 L_3) \\ &\quad + t'_4 (f'_1 L_1 + f'_2 L_2 + f'_3 L_3 + f'_4 L_4 + f'_5 L_5 + f'_6 L_6) \end{aligned} \quad (11)$$

where

$$\begin{aligned} f_1 &= \cos \beta \cos \gamma \\ f_2 &= \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ f_3 &= \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \end{aligned}$$

A23: 式(9)(11)より式(12)を得る。

$$L_1 = f_1 L_1 + f_2 L_2 + f_3 L_3 \quad (12)$$

よって、式(12)より式(13)を得る。

$$f_1 = 1, f_2 = 0, f_3 = 0 \quad (13)$$

A24: 式(13)より式(14)を得る。

$$\beta = \gamma = 0 \quad (14)$$

A25: これより接触拘束として式(15)を得る。

$$\begin{aligned} A_i &= d_i (t'_1 L_1 + t'_4 L_4) d_i^{-1} \\ d_i &= \text{Trans}(a, b, c) R_x(\alpha) \end{aligned} \quad (15)$$

A3: 組合せとして式(16)を選択する。

$$\begin{aligned} A_1 &= d_1 (t'_1 L_1 + t'_4 L_4) d_1^{-1}, \quad d_1 = \text{Trans}(a_1, b_1, c_1) R_x(\alpha_1) \\ A_2 &= d_2 (t'_1 L_1 + t'_4 L_4) d_2^{-1}, \quad d_2 = \text{Trans}(a_2, b_2, c_2) R_x(\alpha_2) \end{aligned} \quad (16)$$

A4: これより式(17)を得る。

$$\begin{aligned} C_1 &= d_1 \text{Trans}(t'_1, 0, 0) R_x(t'_4) d_1^{-1}, \quad d_1 = \text{Trans}(a_1, b_1, c_1) R_x(\alpha_1) \\ C_2 &= d_2 \text{Trans}(t'_1, 0, 0) R_x(t'_4) d_2^{-1}, \quad d_2 = \text{Trans}(a_2, b_2, c_2) R_x(\alpha_2) \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)で表現される機構は図 7(b) となる。

6. おわりに

本報では、リー代数に基づく接触拘束の組合せによる機構設計法において、並列拘束に対してリー代数に基づく接触拘束の組合せによる機構の導出(シンセシス)を行う手法を提案した。

【参考文献】

- [1] 徳永他: 機構モデルにおけるリー代数に基づく拘束表現と機構のシンセシス, 精密工学会誌, Vol.66, No.10 (2000) pp1533-1537
 [2] 村井他: 機構解析における最小機構モデルの導出に関する研究, 2000 年度精密工学会北海道支部学術講演論文集, pp42,43.
 [3] R.M.Murray, Z.Li, S.S.Sastry: A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, (1994) CRC Press

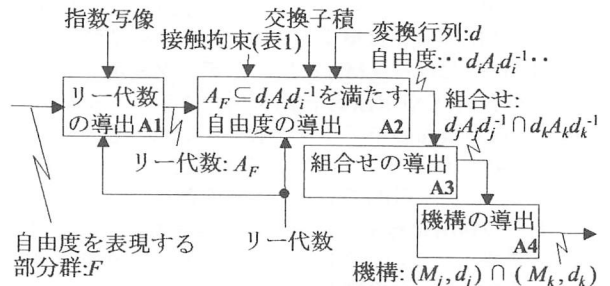


図4 リー代数に基づく機構のシンセシス手順

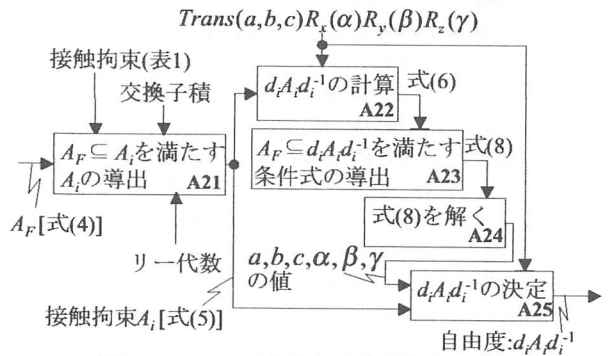


図5 $A_F \subseteq d_i A_i d_i^{-1}$ を満たす接触拘束の導出

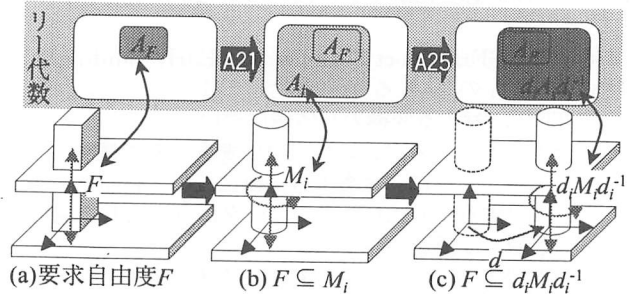


図6 部分代数を成す自由度の導出

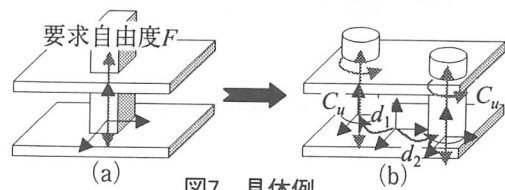


図7 具体例