

リー代数に基づく機能面間幾何拘束関係の表現とコンピュータ支援幾何公差設計

北海道大学大学院工学研究科 ○岩田健雄,田中文基,岸浪建史

要 旨

現在市販されている公差解析ソフトは、3次元モデルに公差値の決定を支援する機能しかない。機能面間幾何拘束関係表現にリー代数を導入する事で、コンピュータ上で公差が指定される要素群に対し、適切な公差の候補を提示する公差設計支援手法を提案する。

1. はじめに

製品開発においては、製品に求められる機能を満たす公差を導出する必要がある。公差を付けるには図1に示した次の段階がある。①公差が指定される要素を決める、②公差を決める、③公差値を決める。しかし、現在市販されている公差解析ソフトには公差値の決定を支援する機能しかない。そこで本研究では、公差が指定される要素に対し、リー代数に基づき計算機上で自動的に公差の候補を導出する公差設計支援手法を提案する。

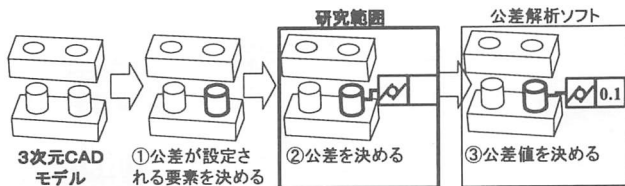


図1 本研究の背景及び目的

2. 公差設計の考え方

本研究では、以下に示す公差設計の考え方を基として公差設計支援を行う。

2.1. 単独機能面の公差設計

単独の機能面に対する公差設計を考える。組立品設計において、機能面拘束の種類（機能面の種類）は設計要求により決定される。ここで機能面とは他の部品と接触する表面、その自由度を機能面の幾何を変化させない独立な方向と定義する。また、機能面拘束基準要素とは機能面が持つ自由度を点、直線、平面を用いて表現したものと定義する。この時、公差は機能面拘束を満たすように機能面と機能面拘束基準要素に与える制約とみなし、表1から公差候補を導出する[1]。例えば図2に示すように、円筒面の円筒度公差が円筒機能面に対し導出され、真直度公差が機能面拘束基準要素（中心線）に対して導出される。

表1 機能面公差設計表[1]

機能面	機能面拘束基準要素	寸法	公差
球面	点	ϕ	\ominus
平面	面	なし	$\square, -$
円筒面	線	ϕ	$\parallel, \circ, -$
らせん面	点・線	$\phi, \text{Pitch or thread}$	Ref. ANSI Y 14.6
回転面	点・線	ϕ, R	\circ, \curvearrowright
角柱面	線・面	\downarrow, R	$-, \square$
一般面	点・線・面	\downarrow, R	$-, \square$

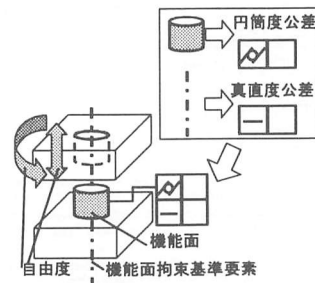


図2 単独機能面の公差設定

2.2. 複合機能面の公差設計

次に、複数の機能面（複合機能面）に対する公差設計を考える。今、図3のような2つの平行な円筒面を例にとる。この時2つに共通の自由度を考えると1次元の平行移動のみであり、それは角柱面と同じ自由度になる。従ってこの

仮想的な角柱面を仮想機能面と呼ぶ。この時の機能面拘束基準要素を角柱機能面と同一とする。また仮想機能面は機能面を子とする2分木で表される。一方、幾何条件によって仮想機能面が決定されるので公差は幾何条件に与えられる制約とみなし、表2から公差候補を決定する[1]。図3の例では、幾何条件は平行であるので公差候補は平行度公差と位置度公差となる。

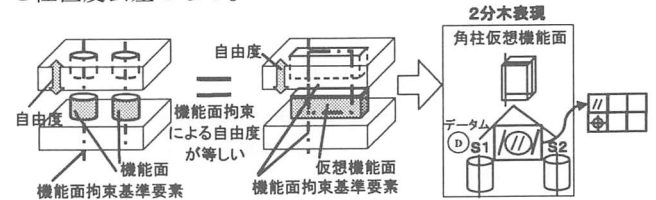


図3 複合機能面の公差設定

表2 複合機能面公差設計表[1]

(A)点Aがデータムの場合		(B)平面がデータムの場合			
	一致	平行	垂直	交差	
点	\oplus	$\parallel\oplus$	なし	なし	
平面	$\oplus, \triangle, \text{or } \square$	$\parallel\oplus, \triangle, \text{or } \square$	$\perp, \triangle, \text{or } \square$	$\angle, \triangle, \text{or } \square$	
直線	$\oplus, \triangle, \text{or } \square$	$\parallel\oplus, \triangle, \text{or } \square$	$\perp, \triangle, \text{or } \square$	$\angle, \triangle, \text{or } \square$	
(C)直線がデータムの場合					
	一致	平行	垂直	交差	ねじれ
直線	\oplus	$\parallel\oplus$	なし	なし	なし
平面	$\oplus, \triangle, \text{or } \square$	$\parallel\oplus, \triangle, \text{or } \square$	$\perp, \triangle, \text{or } \square$	$\angle, \triangle, \text{or } \square$	なし
直線	$\perp, \triangle, \text{or } \square$	$\parallel\oplus, \triangle, \text{or } \square$	$\perp, \triangle, \text{or } \square$	$\angle, \triangle, \text{or } \square$	$\curvearrowright, \triangle, \text{or } \square$

3. 公差設計の流れ

提案する手法の流れは図4のようになる。まず3次元CADモデルが与えられた時、どのような順序で機能面・仮想機能面が結合していくかを表す仮想機能面結合木を作成する。次に各機能面の機能面拘束基準要素とリー代数表現を導出する。次にリー代数による拘束還元を行う事で仮想機能面とそのリー代数表現を作成する。次にリー代数によって各機能面拘束基準要素間の幾何関係を抽出する。最後に、機能面の公差設計、仮想機能面の公差設計を行う。リー代数については次節で述べる。

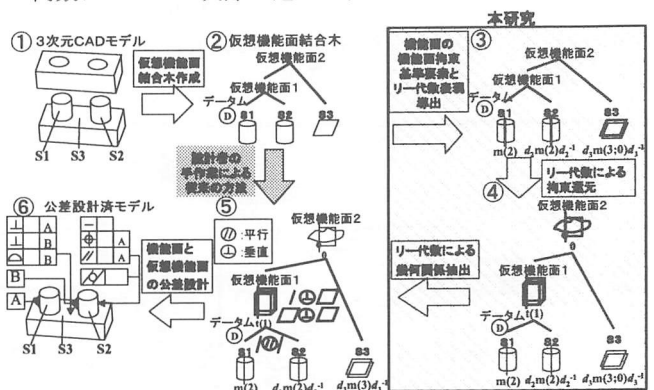


図4 公差設計の流れと本研究の範囲

4. リー代数と機能面

剛体運動を表現する行列の集合はリー群

$$SE(3) = \{Trans(x, y, z)R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) \mid x, y, z, \phi, \theta, \psi \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

を成す。ここで $Trans(x, y, z)$ はベクトル (x, y, z) による並進、 R_x, R_y, R_z は各軸に関する回転を表現している。

一方、リー群 $SE(3)$ のリー代数 $se(3)$ は行列の指数写像を用いて

$$se(3) = \{a \mid \exp(a) \in SE(3)\} \quad (2)$$

と定義される。また $se(3)$ の任意の元 a は、表3の L_1 から L_6 の $se(3)$ の6つの基底をもちいて、(3)式のように線形結合で表わす事ができる。

$$a = \left\{ \sum_{i=1}^6 \alpha_i L_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \quad (3)$$

これらを用いる事で任意の機能面の自由度がリー代数で表現可能となる。全ての機能面とその自由度を表すリー代数の対応を表3に示す [2]。

表3 機能面・リー代数対応表[2]

機能面	自由度	リー代数	但し
球面	並進:0 回転:3	$s = \alpha_1 L_4 + \alpha_2 L_5 + \alpha_3 L_6$	$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
平面	並進:2 回転:1	$m(3;0) = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_6$	$L_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
円筒面	並進:1 回転:1	$m(2) = \alpha_1 L_3 + \alpha_2 L_6$	$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
螺旋面	並進(1) 回転(1)	$m(1; \mu) = \alpha_1 L_3 + \mu \alpha_2 L_6$ (μ : pitch)	$L_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
回転面	並進:0 回転:1	$m(1;0) = \alpha_1 L_6$	$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
角柱面	並進:0 回転:0	$t(1) = \alpha_1 L_3$	$L_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
一般面	並進:0 回転:0	θ	

またデータム座標系から見た他の機能面の自由度は、図5に示すように、その局所座標系におけるリー代数に、左右から、データム座標系から見た S_i の局所座標系への剛体変換行列 d_i と d_i^{-1} をかけたものとなる。以上の手順から、データム座標系から見た各機能面の運動がリー代数を用いて表現される。

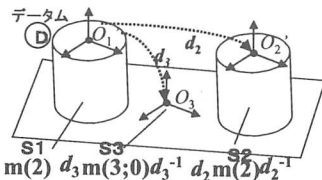


図5 機能面のリー代数表現導出

5. リー代数による拘束還元

拘束還元とは、二つの拘束から新しい拘束を導き出す事である。機能面と機能面拘束とは1対1の対応があるので、仮想機能面を導出する手続きは、二つの機能面拘束から等価な仮想機能面拘束を導出する手続きであるので、拘束還元と等価となる。具体的には、機能面 A と B のリー代数を H_A, H_B としてそれから生成される仮想機能面 C のリー代数を H_C とした時、(4)式のような交差の計算を行う事で仮想機能面の運動が導出される。これはリー代数空間における共通部分をとっている事と等しい。[3]

$$H_C = H_A \cap H_B = \left\{ c \mid c = \sum_{i=1}^6 f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_6) L_i = \sum_{i=1}^6 g_i(\beta_1, \dots, \beta_6) L_i \right\} \quad (4)$$

$$\text{但し } H_A = \left\{ a \mid a = \sum_{i=1}^6 f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_6) L_i, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$H_B = \left\{ b \mid b = \sum_{i=1}^6 g_i(\beta_1, \dots, \beta_6) L_i, \beta_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$$

6. リー代数による幾何関係抽出

次に機能面拘束基準要素間の幾何関係をリー代数により抽出する。 d_j をデータム座標系から S_j の局所座標系への剛体変換行列とすると d_j から機能面拘束基準要素間の位置関係を抽出する事ができる。また、図6に示すように $d_j a_j d_j^{-1}$ はデータム座標系から見た機能面 S_j の運動なので、

$$d_j a_j d_j^{-1} = \left\{ \sum_{i=1}^6 \beta_i L_i \mid \beta_i \in \mathbb{R} \right\} = \beta_1 L_1 + \beta_2 L_2 + \beta_3 L_3 + \beta_4 L_4 + \beta_5 L_5 + \beta_6 L_6 \dots (5)$$

のように変形すると、 $\beta_1 \sim \beta_3$ が平行移動方向比、 $\beta_4 \sim \beta_6$ が回転軸方向比を表しているので、 $d_j a_j d_j^{-1}$ から姿勢関係を抽出する事ができる。

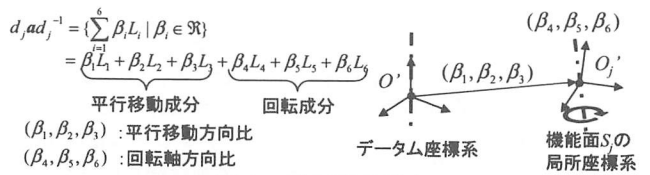


図6 幾何関係抽出

7. 機能面と仮想機能面の公差設計例

図7に示す例に対して具体的に設計する。まず機能面に公差を設計する。例えば S_1 と S_2 は円筒面なので、円筒度公差と真直度公差をつける。次に仮想機能面に対して公差を設計する。 S_1 と S_2 の直線基本機能面拘束基準要素が互いに平行なのでデータムでない S_2 の方に平行度公差と位置度公差をつける。この仮想機能面に対する公差設計を最後まで繰り返す事で公差設計を完了する。

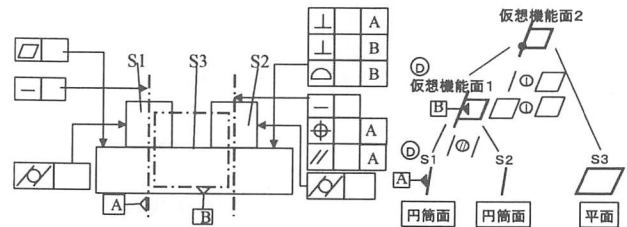


図7 機能面と仮想機能面の公差設計例

8. 結論

リー代数に基づいた公差設計の計算機による支援を行う為に本研究では、機能面とリー代数との関係を明らかにすることで、以下の結果を得た。

- ① リー代数による拘束還元により、仮想機能面関係を公差が定義できる機能面拘束基準要素の関係に変換できた。
- ② 導出された機能面拘束基準要素間の関係から公差の候補を導出する手法を提案した。

参考文献

- [1] A. Desrochers, A. Clemnt, "A Dimensioning and Tolerancing Assistance Model for CAD/CAM Systems", Int J Adv Manuf Technol, 9:352-361, 1994
- [2] O'Connor MA, Srinivasan V, Jones AK, "Connected Lie and symmetry subgroups of the rigid motions: foundations and classifications". IBM Research Report, RC 20512, 26 July 1996
- [3] 徳永仁史、今村聡、田中文基、岸浪建史、「組み立てモデルにおけるリー代数に基づく拘束表現と拘束還元」、精密工学会誌、Vol.65, No.12, pp1729-1734, 1999