

# フラクタル図形の製造法に関する研究

北見工業大学 ○大森 竜太, Sharif Ullah

## 要旨

マイクロ・ナノレベルに存在する多くのオブジェクトの形状はフラクタル性を示す。フラクタル性を持つ図形の CAD モデルを作成することが可能でありながら、その図形を実体化することが困難である。本論文ではフラクタル形状の物理的なモデルの製造法について述べる。さらに本論文では、IFS Leaf (シダ) の物理的モデルの製造を行う。

### 1. 諸言

マイクロ・ナノスケールの図形にはフラクタル性を有するものがある。フラクタルとは自己相似性という原理を数学的に表現しようとしたものである。つまり、フラクタル図形は図形の一部を拡大すると他の部分や全体の形状と一致する自己相似性を持つ図形のことである。フラクタル図形は自然界に多く存在しており、魅力的な形状である。また、フラクタルの応用例としては、コンピュータグラフィックスにおける地形や樹木の自動再生やフラクタル次元を利用して細胞の輪郭の複雑さを測定し異常の有無を判別する医用画像解析などがあり、幅広い分野で活用されている。さらにフラクタル性を持つ図形の CAD モデルを作成することが可能でありながら、その図形を実体化することが困難である。本研究では、フラクタル形状の物理的なモデルの明確かつ効率的な製造法の開発を目的とする。

### 2. IFS について

まずフラクタル図形をグラフィック化するために IFS を用いる。IFS とは Iterated Function System の略で反復関数系の意味を表す。IFS により作成されたフラクタルを IFS フラクタルといい、自身のいくつかのコピーの和集合からなり、各コピーは関数によって変形されている。一般に二次元のフラクタルの描画や計算に用いられることが多い。今回題材にしたのが図 1 の葉(シダ)の形状である。図 1 の IFS フラクタルの基本式として以下に示す。

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= ax_i + by_i + e \quad (1) \\ y_{i+1} &= cx_i + dy_i + f \quad (2) \end{aligned}$$

(1), (2)の $(x_i, y_i)$ は  $i$  番目の点であり、 $(x_{i+1}, y_{i+1})$ は  $i+1$  番目の点である。 $(a, b, c, d, e, f)$ は定数。以下に図 1 の IFS フラクタルに必要なセット番号における各定数とその確率を表 1 に示す。

表 1 セット番号における各定数と確率 p

定数	Set1	Set2	Set3	Set4
a	0.00	0.20	-0.15	0.75
b	0.00	-0.26	0.28	0.04
c	0.00	0.23	0.26	-0.04
d	0.16	0.22	0.24	0.85
e	0.00	0.00	0.00	0.00
f	0.00	1.60	0.44	1.60
p	0.10	0.08	0.08	0.74

初期点 $(x_0, y_0)$ とし、各定数 $(a, b, c, d, e, f, p)$ は乱数を 0~1 まで発生させ、その乱数の範囲に応じて確率的に値を決定する。表 1 が図 1 のフラクタルに必要な $(a, b, c, d, e, f, p)$ の Table である。この条件で(1), (2)式を  $i=1 \dots N$  まで繰り返し計算を行い、点を発生させることで図 1 の形状が作成される。さらに  $N$  を増やすことで図 1 のように形状は明確に表現される。

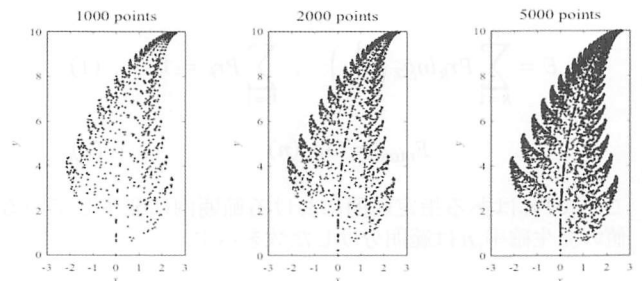


図 1 IFS フラクタルのコンピュータモデル

### 3. IFS フラクタルの加工結果

加工方法は CNC フライス盤を用いて、エンドミルによる加工を行う。図 1 の IFS フラクタルの加工結果を以下の図に示す。

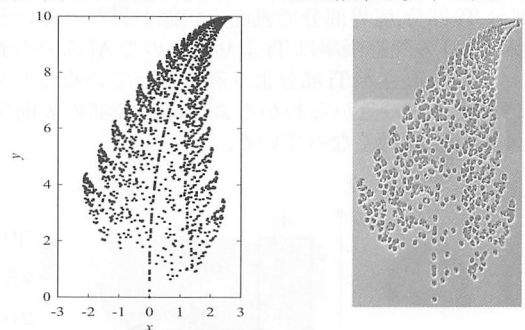


図 2 IFS フラクタルの物理的モデル

### 4. IFS フラクタルの原理の再設計

IFS フラクタルを再設計するために、以下の項目について検討する必要があると考える。

- ① 繰り返される基本形状は何か。
- ② 基本形状のスケーリングはどのように行われているか。
- ③ どのように基本形状の点の数を決めるのか。
- ④ 交差しないツールパスはどのように作り出すか。
- ⑤ 加工時間はどのように短縮するか。

### 5. 繰り返されている基本形状

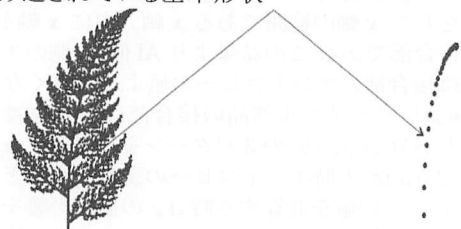


図 3 葉の中央脈の生成

葉の中央脈は以下の式(3),(4)により構成されている。  
この形状を基本形状とし、葉の構成を考えていく。

$$x_{i+1} = 0.85x_i + 0.04 + 0 \quad (3)$$

$$y_{i+1} = -0.04x_i + 0.85y_i + 1.6 \quad (4)$$

## 6. 基本形状のマッピング

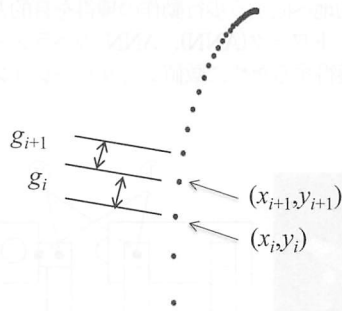


図4 基本形状のマッピング

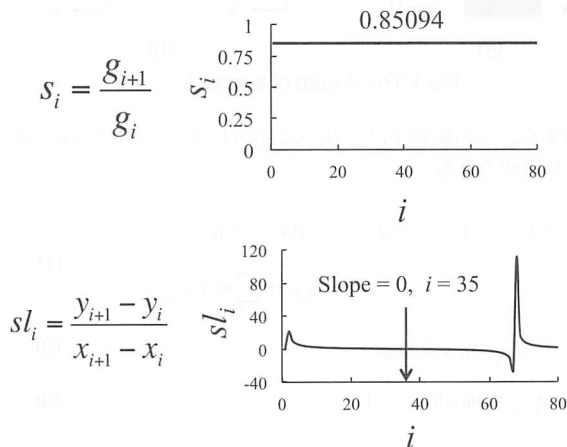


図5 基本形状のマッピングにおけるスケール係数  $s_i$  とスロープ  $sl_i$

ここでは、スケールとスロープを見るために  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  と置き、それぞれ  $i$  番目、 $i+1$  番目の点である。  
 $g_i$ ,  $g_{i+1}$  はそれぞれ図4に示すように2点間の距離を示している。図5より、スケール係数を  $s_i$ 、スロープを  $sl_i$  とすると  $s_i = 0.85094$  とし、 $sl_i$  は  $i=35$  まで減少し0になっている。このことからスケールは常に一定であり、スロープは0になるまでの点の数が基本形状のマッピングに必要な点であると考える。

## 7. 最適なツールパスと加工時間の短縮

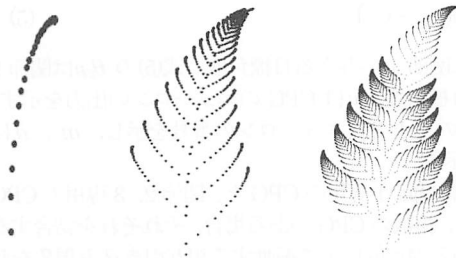


図6 各段階におけるIFSフラクタルのコンピュータモデル

図6の左側が基本形状であるが、これを一段階とする。次に真ん中の形状が二段階、右側の形状が三段階とする。二段階目の形状の説明としては、ある一定の間隔で基本形状の左右に基本形状をさらに作りだしている。この一定の間隔はフラクタルの特性によるものである。三段階目の形状は、二段階目の左右に作りだした基本形状に二段階目と同じことを繰り返すことで得られる。これにより、フラクタル性を保ったまま、加工時間を考慮したツールパスを得ることができると考える。

## 8. 改善後の加工結果

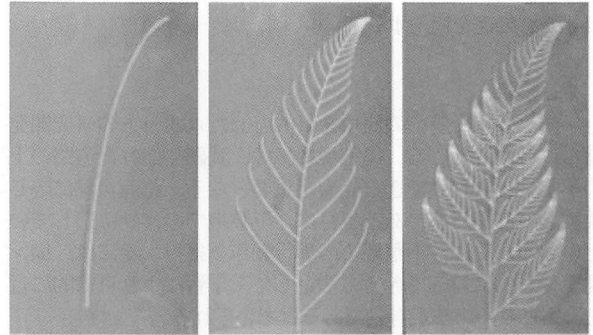


図7 各段階におけるIFSフラクタルの物理的モデル

加工はNCフライス盤を使用してエンドミルによる加工である。三段階目の加工は上方の部分には行っていない。これはエンドミルの直径を考え、葉の構成を途中で止めている。図7の結果からも、一枚一枚の葉の先端部分は工具直径による影響で塗りつぶされた状態になっている。加工時間においては三段階目が約25分の時間を要した。

## 9. 結言

最初に図2で示したIFSフラクタルの加工結果と図7で示した加工結果を比べてみると、図7の物理的モデル(右側)は、基本形状をジェネレーターにすることで、ツールパスの改善と点の数の減少を実現した。このことにより、加工時間の短縮につながり、形状の明確さも向上した。しかし、三段階目の物理的モデルは上方の部分まで形状を構成していないので、三段階目での加工の限界を知る必要がある。さらに段階を進め、4段階目、5段階目と加工を行い、段階における限界を検討していく必要がある。さらに点と点が密集してくると、工具直径の影響が大きくなる。そのため、工具直径を考慮したシステムの考案が必要となる。つまり今後の課題としては、ジェネレーターを発生させる段階の限界を知る上で、工具直径に応じてデータ収集可能なシステムの考案である。

## 10. 参考文献

- 1) Mandelbrot, B.B., "How Long is the coast of Britain Statistical self-similarity and fractional dimension," science, 156(3775) (1976)pp.636-638.
- 2) Barnsley, M., "Fractals Everywhere," San Diego: Academic Press: San Diego, USA, 2003.
- 3) Soo, S.C, Yu, K.M., Chiu, W.K., "Modeling and fabrication of artistic products based on IFS fractal representation," "Computer-Aided Design, 38(7)(2006)pp.755-769
- 4) Sharif Ullah, A.M.M., Omori, R., Nagara, Y., Kubo, A. and Tamaki, J., Toward Error-Free Manufacturing of Fractals, Proceedings of the CIRP CIME'12, July, Naples, Italy, 2012.