

陰関数を用いた 4 次元形状表現に関する研究

北海道大学 ○加藤 勇気, 小野里 雅彦, 田中 文基

要 旨

既存の 4 次元形状モデリングでは, 4 次元メッシュモデルと呼ばれる四面体による境界表現を扱う研究が主体である. しかし 4 次元メッシュモデルには, 滑らかな形状表現を行うためには膨大な要素数が必要になる, 形状の内外情報が欠如している, といった問題がある. 本研究では, 陰関数を用いた 4 次元形状表現, 生成手法を提案し, それらの問題解決を目指す.

1 はじめに

機械設計・製造, 切削加工や物理シミュレーションなどの幅広い分野で, 時間進行に伴い運動あるいは変形する 3 次元形状に対する解析が必要となる状況が数多く存在する. このような動的に変化する 3 次元形状は 4 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^4 で静止する 4 次元形状として表現し, 解析することが有効である.

4 次元の形状を表現するモデルとして, 4 次元メッシュモデルが川岸[1]により提案された. しかし, 4 次元メッシュモデルは 4 次元形状の境界のみを四面体で表現するモデルのため, 形状の内外判定に手間がかかり, 曲面などの滑らかな形状を表現するためには膨大な四面体が必要になる.

このような問題に対し本研究では, 滑らかな形状表現が可能で, 内外判定の容易な 4 次元形状表現の提案し, 陰関数を用いた 4 次元形状表現の検討を行う.

2 陰関数による形状表現の概要

ある陰関数 $f(x), x \in \mathbf{R}^n$ により, n 次元形状は図 1 に示した断面図のように規定される. 白線で描かれた, 関数値が 0 となる点の集合が形状表面であり, 形状の内外はそれぞれ関数値の正負に対応する. これにより, 形状内外の判定が容易に行える.

3 RBF を用いた離散点群補間による陰関数生成

3.1 4 次元の離散点群補間 [2]

本研究では, 時系列的な法線付き 3 次元点群データが得られたとき, それらの点群を 4 次元空間に存在する離散点群 $x_i \in \mathbf{R}^4 (i = 1, \dots, N)$ とみなし, RBF (Radial Basis Function, 放射基底関数) を用いて 4 次元陰関数を生成する. 得られた点群は 3 次元形状の表面上に存在する点 (構成点) であり, その点での関数値は $f(x_i) = 0$ となる. 陰関数を求めるためには形状の内部あるいは外部に存在し, $f(x_i) \neq 0$ となる点 (制約点) が必要となる. ここでは, 制約点は図 2 に示すように, 構成点の法線ベクトル方向にある距離だけ離れた位置に配置する. この距離を d_{cp} とおき, 制約点における関数値は -1 とする. これらの点群から, 4 次元陰関数 $f(x)$ を式 (1) のように表現する.

$$f(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|x - x_j\|) \quad (1)$$

$\phi(\|x - x_j\|) = \phi(r_j)$ は RBF, λ_j は各点における重みパラメータであり, 式 (2) を連立させ導出する.

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|x_i - x_j\|) = h_i \quad (2)$$

h_i は点 x_i における関数値で, ここでは 0 か -1 である.

3.2 基底関数の選択に関する考察

RBF をどのような関数に決定するかは, 陰関数生成結果に大きな影響を与える. ここでは, RBF として式 (3) のガ

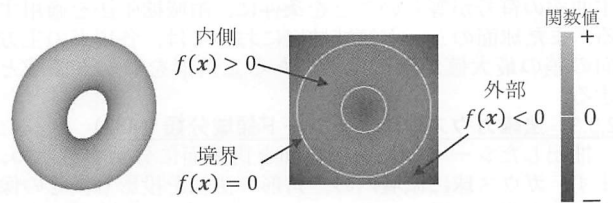


図 1 陰関数による形状表現, トーラスと断面図

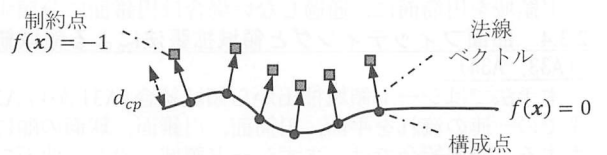


図 2 制約点および構成点の配置

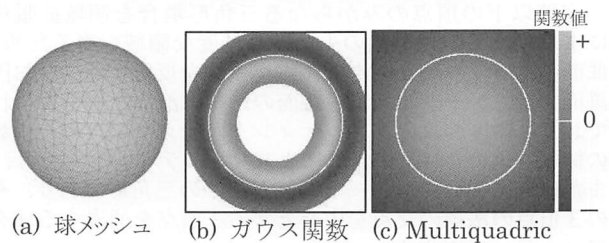


図 3 基底関数による陰関数生成結果 (断面図) の違い
ウズ関数, 式 (4) の Multiquadric を用いた例を示す.

$$\phi(r) = \exp(-c^2 r^2) \quad (3)$$

$$\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2} \quad (4)$$

c は任意の実数である. 図 3 (a) の球状のメッシュモデルの頂点を 3 次元点群として取り出し, 3 次元陰関数を式 (3) と式 (4) で生成した結果の断面図を図 3 (b) および (c) に示す. この結果から, ガウス関数を用いた場合には, 球の表面以外に関数値が 0 となっている領域が存在する. これは, ガウス関数は $r \rightarrow \infty$ で 0 に収束してしまうためである. よって, 本研究の扱う問題には Multiquadric のような距離 r が大きい点においても 0 に収束しない関数の方が適しており, 以降は RBF として Multiquadric を用いる.

3.3 階層構造に基づく陰関数生成

3.1 で述べたように, RBF を用いた陰関数生成手法では大規模な連立方程式を解く必要があるため, 計算コストが大きいという問題がある. そこで, 階層構造に基づく陰関数生成手法[3]を用いる.

図 4 (a) に示すように, 二分木構造に基づき点群の AABB (Axis Aligned Bounding Box) を根ノードとした領域分割を行う. 領域分割は AABB の最も長い辺を切断するように行い, 葉ノードに含まれる頂点数が任意の閾値 T_{leaf} 以下に

なるまで繰り返す。

領域分割後、それぞれの葉ノードの領域 Ω に含まれる点群を用いて、個別に 3.1 の手法で陰関数 f を導出する。それらの陰関数を図 4 (b) のように、葉ノードから根ノードへ接続していくことで、領域全体の陰関数を求める。親ノードの陰関数 $f^{l-1}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} = (x, y, z, t)$) は、子ノードの陰関数 $f_1^l(\mathbf{x}), f_2^l(\mathbf{x})$ を C^n 級の重みづけ関数 $\Lambda_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2$) により結合することで式 (5) のように求められる。

$$f^{l-1}(\mathbf{x}) = \frac{\Lambda_1(\mathbf{x})f_1^l(\mathbf{x}) + \Lambda_2(\mathbf{x})f_2^l(\mathbf{x})}{\Lambda_1(\mathbf{x}) + \Lambda_2(\mathbf{x})} \quad (5)$$

$$\Lambda_i(\mathbf{x}) = \left(\prod_{r \in \{x, y, z, t\}} \frac{4(r - c_{r,1})(c_{r,2} - r)}{(c_{r,1} - c_{r,2})^2} \right)^{n+1} \quad (6)$$

ここで、子ノードの領域 Ω の対角線の端点を $\mathbf{c}_1 = (c_{x,1}, c_{y,1}, c_{z,1}, c_{t,1}), \mathbf{c}_2 = (c_{x,2}, c_{y,2}, c_{z,2}, c_{t,2})$ とする。

3.4 新たな領域分割ルールの付加

時系列的な 3 次元点群が 4 次元空間に存在する場合、それらの点はある特定の時間の超平面上のみに局在する。このことから、3 次元の場合と同様な領域分割を行うと、図 5 (a) に示すように一方の子ノード (Ω_1) に単一の時間 ($t = t_1$) の点群のみ含まれるという状況が生じ、形状の欠落などの問題につながる。このような問題を防ぐために、次の 2 つの領域分割ルールを付加する。

- 空間方向 (x, y, z) の領域分割：分割の結果図 5 (a) のような不具合が生じる場合は、切断方向を異なる空間軸に変更する。
 - 時間方向 (t) の領域分割：点群の存在する超平面の数を基準に分割を行う。分割は図 5 (b), (c) に示すように、超平面の数が奇数個のときは中央の 1 つ、偶数個のときは中央の 2 つの点群を共有するように行う。超平面の数が 2 つのみのときは、分割を行わない。
- 次に、これらの分割ルールを用いた陰関数の生成を行う。

4 4 次元陰関数生成手法の実装

図 6 に示す球からトーラスへの変形を表す時系列の点群から、RBF のパラメータ $c = 0.1$ 、制約点の距離 $d_{cp} = 0.5 \times 10^{-3}$ として、提案した方法により 4 次元陰関数生成を行った。結果を図 7, 8 に示す。可視化の際には軸に垂直な超平面による切断形状を、Bloomenthal の手法[4] でポリゴン化した。この結果から、生成した 4 次元陰関数は球からトーラスへの滑らかな変形を表現できている。

5 まとめ

本研究では、陰関数を用いた 4 次元形状表現を提案し、RBF により時系列の 3 次元点群データを補間することによる 4 次元陰関数生成を行った。このとき、新たな領域分割ルールを付加することで、形状の変形を滑らかに表現できた。また、陰関数生成の際に用いる RBF として、式 (4) の Multiquadric が適していることを示した。

今後の課題として、得られた 4 次元形状が妥当であるかの評価基準および手法の提案、陰関数生成にあたっての各種パラメータの影響の調査などが挙げられる。

[参考文献]

[1] 川岸良次, “サイバーフィールド構築のための時空間形状モデリング手法に関する研究”, 北海道大学 工学部 卒業論文, 2008.

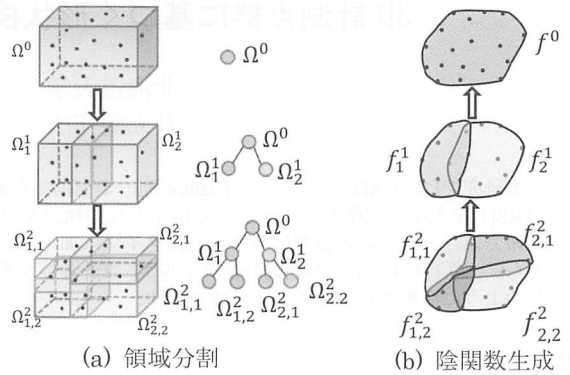


図 4 階層構造に基づく陰関数生成

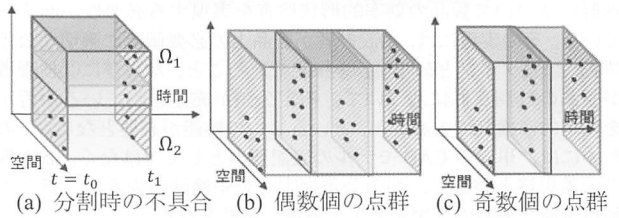


図 5 領域分割時の不具合と時間方向の領域分割

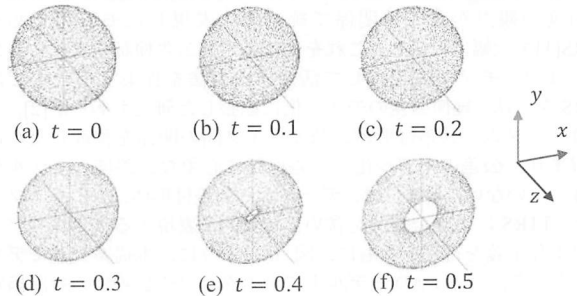


図 6 4 次元陰関数生成に用いた時系列の 3 次元点群

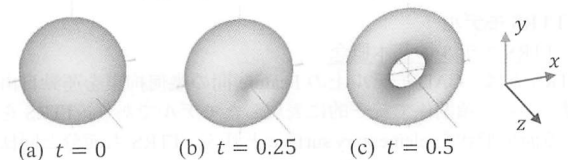


図 7 4 次元陰関数生成結果：時間軸に垂直な超平面による切断面形状

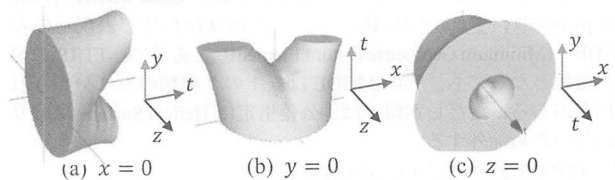


図 8 4 次元陰関数生成結果：空間軸に垂直な超平面による切断面形状

[2] G. Turk, et al., “Shape Transformation Using Variational Implicit Function”, Proc. of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 1999.

[3] Joachim Pouderoux, et al., “Adaptive Hierarchical RBF Interpolation for Creating Smooth Digital Elevation Models”, Proceeding of the Twelfth ACM International Symposium on Advances in Geographical Information System, 2004.

[4] Jules Bloomenthal, “An implicit surface polygonizer”, In Graphics Gems IV, Academic Press, 1995.