

反復関数系を用いて作成されたフラクタル図形の再設計に関する研究

北見工業大学 ○岡本 卓也、裡 しゃりふ、久保 明彦、GHOSH Angkush Kumar

要旨

複雑な形状のモデリングにはユークリッド幾何学よりフラクタル幾何学が有効である。しかしフラクタル幾何学で作成されたモデルを製造するには再設計する必要がある。その再設計は形状モデルの自己相似性を段階的に制御する。そこで本研究はフラクタル形状の再設計を行う手法について述べる。特に反復関数系を用いて作成されたフラクタル図形であるシダの葉とシェルペンスキーカーペットの再設計を行い、その有効性を明らかにした。

1. 諸言

現在、我々の身の回りには様々な製品で溢れており、ユークリッド幾何学を用いて設計されている。例えば歯車のような部品もユークリッド幾何学を用いて設計されている。しかしユークリッド幾何学では表現できない複雑な形状は別の幾何学を用いる必要がある。そこで有効となるのがフラクタルである¹⁾。フラクタルとは幾何学の一つであり、1960年代にマンデルブロによって提唱されたことで複雑な形状をモデルするための有効な手法として注目を集めた²⁾。フラクタルには自己相似性とフラクタル次元という概念が存在する。まず自己相似性とは一見規則性がない非常に複雑な形状を至ってシンプルな規則によって表現可能で、その規則性とは各部分が全体の縮小された複製体であるといったものである。言い換えると、どこまで拡大・縮小しても同じ形状が現れるといったものである。次にフラクタル次元とは通常次元数には整数の値が用いられるが、複雑な形状に対しても次元数を計算することが可能で非整数の次元数も取り扱うことが出来る。またフラクタル次元はハウスドルフ・ベシコビッチ次元としても広く知られている。これらの特徴を持つ形状を一般にフラクタル形状と呼ぶ。このフラクタル形状の例として木、花、海岸線、葉、細胞、血管等が挙げられる。これらのようなフラクタル形状のデジタルモデルを作製するには反復関数系(Iterated Function System、以下 IFS)³⁾という数学的手法を用いる必要がある。IFS でフラクタル形状をモデル化するにはいくつかの縮小マッピングを使用し、回転、縮小・拡大、平行移動といった操作を行うことで自己相似性を与えることが出来る。またその時に各マッピング毎にあらかじめ用意された特定の確率を用いてランダム的に点群を発生させる。IFS のアルゴリズムは右の Algorithm 1 の通りである³⁾。このように IFS を用いてモデル化された幾何学モデルを IFS フラクタルと呼ぶ。フラクタルの登場とフラクタル形状の再現が可能となったことによって様々な分野で応用されている。例えば、生物学では構造のモデル化や複雑性の測定等に自己相似性の概念を応用している。また通信分野においてはアンテナ等の設計に IFS フラクタルが応用されており、いくつかの周波数の同時送信を可能にしている。他にも製造工学における信号処理や粗さの定量化などのように物体や現象の複雑性を定量化するためにフラクタル次元の概念が用いられている。

ここでフラクタル形状の製造について考えてみる。CAD 上でフラクタル形状を再現出来たとしても、製造技術や精度といった問題が存在するため正確に製造出来るとは限らない。このことから製造するためには再設計を行う必要がある。しかしその再設計の明確な手段は明らかになっていない。そこで本研究は製造に適した再設計の手法を提案するものである。本論文の残りの部分は以下のように構成される。第2節では IFS フラクタルであるシダの葉とシェルペンスキーカーペットを例にどのような再設計を行うかの手法について述べる。第3節では再設計を行ったフラクタル形状を実際に製造した結果及び考察について述べる。第4節では本論文の結論を述べる。

Algorithm 1: Iterated Function System

```
1: Define  $N, (x_0, y_0), (p_j | j = 1, \dots, n)$   
    $\{(a_j, b_j, c_j, d_j, e_j, f_j) | j = 1, \dots, n\}$   
2: For  $j = 1, \dots, n$   
3:    $cp_j = p_1 + \dots + p_j$   
4: End For  
5: Calculation  $w_1 = [0, cp_1)$   
6:    $w_n = [cp_{n-1}, cp_n]$   
7: For  $j = 2, \dots, n-1$   
8:    $w_j = [cp_{j-1}, cp_j)$   
9: End For  
10: For  $i = 1, \dots, N$   
11:   random number:  $r_i \leftarrow [0,1]$   
12:   For  $j = 1, \dots, n$   
13:     If  $r_i \in w_j$  Then  
14:        $x_i = a_j x_{i-1} + b_j y_{i-1} + e_j$   
15:        $y_i = c_j x_{i-1} + d_j y_{i-1} + f_j$   
16:     End For  
17:   End For  
18: Output  $Pc = \{(x_i, y_i) | i = 0, \dots, N\}$ 
```

2. 再設計手法

ここではフラクタルの製造を行うための再設計手法についてシダの葉とシェルペンスキーカーペットを例として述べる。

初めにシダの葉の再設計について述べる。まずそもそも IFS でシダの葉を再現するには M1, M2, M3, M4 の4つのマッピングが使用される^{2,4)}。これらのマッピングを元にシダの葉の再設計の手法には one-to-one マッピングを使用する。シダの葉の再設計によるモデル化の手順は次のとおりである。

- 手順1: 元となる点群(Seed)は M2 を力学系で実行し、発生させる。
- 手順2: Seed を M3 で one-to-one マッピングを行い、点群(PL1)を発生させる。
- 手順3: PL1 を M2 で one-to-one マッピングを行い、点群(PL2)を発生させる。
- 手順4: PL2 を M2 で one-to-one マッピングを行い、点群(PL3)を発生させる。
- 手順5: 手順4 を Seed の点の数分繰り返す。

ここでは手順2でM3を使用した場合のみ記載したが、M4を使用した場合も全く同様の操作である。またM1に関しては使用していない。これらの操作を行うことで段階制御されたシダの葉のモデル化が可能となる。

次にシェルペンスキーカーペットの再設計について述べる。シェルペンスキーカーペットをIFSで再現するにはM1からM8までの8つのマッピングが使用されるが、再設計ではIFSの他に手順を付け加える。シェルペンスキーカーペットの再設計によるモデル化の手順は次の通りである。

手順1：外形の4つの頂点を定め、それぞれの頂点間において線形補間を行って元となる点群(Seed)を発生させる。

手順2：Seedの点群を1/3の圧縮率で圧縮させ、その点群をP1とする。

手順3：P1をシェルペンスキーカーペットに該当するIFSによって拡散させる。

シェルペンスキーカーペットの再設計では手順2で1/3に圧縮するためマッピングを一つ追加している。これらの手順を行うことでシェルペンスキーカーペットをモデル化することが出来る。

3. 結果と考察

ここでは再設計を行ったシダの葉とシェルペンスキーカーペットの二つの形状を実際に製造した結果について述べる。また今回製造には光造形方式と熱融解方式の2種類の市販されている積層造形装置を使用している。

今回シダの葉に関しては1段階と2段階の2つを用意した。図1はその点群モデルである。この点群モデルを線に置き換えて厚みを持たせることでこれらの形状の設計を行った。また製造には光造形方式の積層造形装置を使用して作製した。図2に1段階のデジタル3Dモデルと作製物、図3に2段階のデジタル3Dモデルと作製物を示す。

今回図2と図3からわかるようにシダの葉の製造が行えたため再設計の手法は有効であると言える。また1段階と2段階共にデジタル3Dモデルと作製物を比較しても非常に再現性が高いことがわかる。

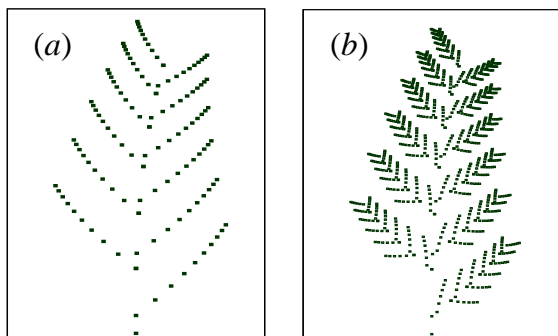


図1 シダの葉の点群モデル：(a)1段階、(b)2段階

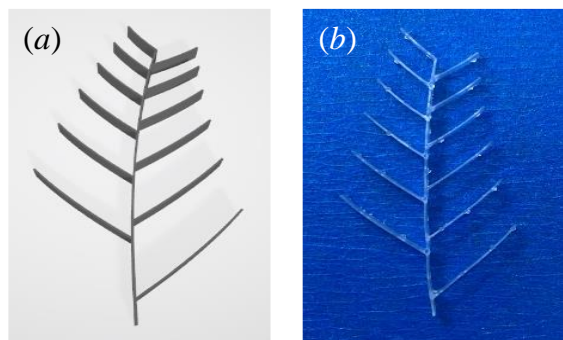


図2 シダの葉2段階：(a)デジタル3Dモデル、(b)実際の作製物

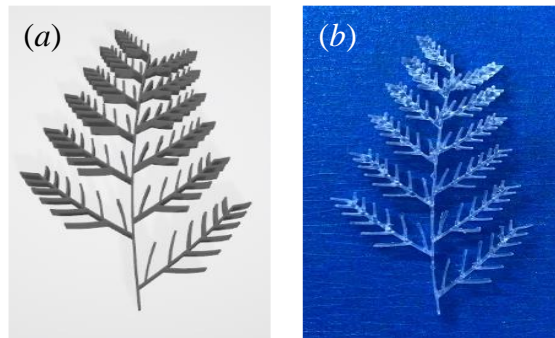


図3 シダの葉2段階：(a)デジタル3Dモデル、(b)実際の作製物

シェルペンスキーカーペットは5段階に制御したものに、ボクセル方式で点に形状を与えて設計したモデルを熱融解積層方式で製造を行った。図3(b)の作製物を見ると、おおよそシェルペンスキーカーペットの形状を再現出来ているため再設計の手法は有効であると言える。しかし1段階から3段階までは四角形の穴を認識出来るが、4段階と5段階に関しては認識出来ないため細かい部分は綺麗に形状を再現出来ていないと言える。これについて考えられる理由としては、設計の際にIFSによって点群を拡散したため均等に配置されていないことが考えられる。

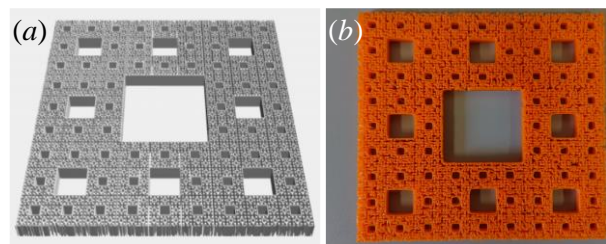


図4 シェルペンスキーカーペット：(a)デジタル3Dモデル、(b)実際の作製物

4. 結論

今回二種類のフラクタル形状に関して再設計を行い、製造した。結果的にはどちらも製造出来たが再設計の手法が異なるため、他の形状の場合はまた違った再設計の手法が必要になると推測出来る。以上のことから今後の方針は他のフラクタル形状に関する再設計の手法を明らかにし、製造の可不可及び製造精度を検証することである。

参考文献

- [1] B.B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman: New York, NY, USA, 1983.
- [2] M. F. Barnsley and S. Demko. Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals. *Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 399(1817), pp. 243–275, 1985.
- [3] A. S. Ullah, D. M. D'Addona, Y. Seto, S. Yonehara, and A. Kubo. Utilizing Fractals for Modeling and 3D Printing of Porous Structures. *Fractal and Fractional*, 5(2), Article Number 40, 2021.
- [4] A.M.M.S. Ullah, Y. Sato, A. Kubo, and J. Tamaki. Design for Manufacturing of IFS Fractals from the Perspective of Barnsley's Fern-leaf. *Computer-Aided Design and Applications*, 12(3), pp. 241–255, 2014.